Les Cadrans Solaires

Travail de Maturité

Michel Di Salvo

3M7

Gymnase Auguste Piccard

Lundi 13 Novembre 2006

Florentin Acker

Table des matières

- Résumé - page 2
- Liste des abréviations utilisées dans ce travail - page 3
- Les mouvements du système terre-soleil - page 4
- L'heure par rapport au lieu où on se trouve - page 5
  - Avant la création du système des fuseaux horaires - page 5
  - Après la création du système des fuseaux horaires - page 6
- Introduction aux cadrans solaires - page 7
- Fonctionnement d'un cadran solaire - page 9
  - Généralité - page 9
  - Avant l'instauration du système des fuseaux horaires - page 13
  - Après l'instauration du système des fuseaux horaires - page 13
  - Aujourd'hui - page 15
- Construction d'un cadran solaire - page 15
- L'équation du temps - page 17
  - Calcul de la position angulaire du soleil moyen à un moment donné - page 19
  - Calcul de la position angulaire du soleil vrai à un moment donné - page 20
    - Le périhélie et l'aphélie - page 22
    - Calcul des caractéristiques d'un petit bout de la trajectoire du soleil vrai - page 25
    - Calcul des caractéristiques du point n - page 26
  - Projection du soleil vrai sur le plan de l'équateur - page 28
  - Calcul de l'équation du temps - page 34
- Conception d'un cadran solaire armillaire qui donne directement l'heure légale - page 37
  - Calcul de la déclinaison du soleil vrai - page 38
  - Conception du cadran - page 40
  - Construction du cadran - page 41
  - Traçage de l'axe y - page 42
  - Mesure de la déclinaison du soleil vrai - page 42
  - Fonctionnement du cadran - page 44
  - Traçage des lignes horaires - page 47
  - Utilisation du cadran - page 49
- Limite de la précision d'un cadran solaire - page 50
- Construction d'un cadran solaire très précis - page 52
- Bibliographie - page 54
- Annexes - page 54

Résumé

Un cadran solaire est un instrument qui permet de mesurer l'heure grâce au soleil. Un cadran solaire se compose d'un style qui fait de l'ombre sur une table. Pour lire l'heure, on repère la position de l'ombre du style engendrée par le soleil; on identifie la ligne horaire qui est la plus proche de cette ombre; et on lit l'heure qui est indiquée sur cette ligne horaire. Si le cadran solaire qu'on utilise ne tient pas compte du système des fuseaux horaires, pour obtenir l'heure légale, on ajoute deux facteurs de correction: le facteur de correction du fuseau horaire et l'équation du temps. Si le cadran tient compte du système des fuseaux horaires, pour obtenir l'heure légale, on ajoute un seul facteur de correction: l'équation du temps. S'il tient compte de l'équation du temps, l'heure indiquée par le cadran correspond directement à l'heure légale. La précision maximale d'un cadran solaire est d'environ une minute.

Le facteur de correction du fuseau horaire varie en fonction du lieu où on se trouve, mais il reste constant au cour du temps. Ce facteur de correction se calcule facilement à l'aide d'une simple formule.

L'équation du temps varie en fonction du moment de l'année; mais elle est la même à n'importe quel endroit sur terre. Le but de l'équation du temps est de corriger l'erreur due aux irrégularités des mouvements du système terre-soleil. Les mouvements du système terre-soleil sont si compliqués qu'il n'existe pas de moyen rigoureux et précis pour calculer l'équation du temps. Cependant il existe des méthodes qui permettent d'obtenir de bonnes approximations de l'équation du temps. Dans ce travail, je traite les deux méthodes principales. La première méthode d'approximation de l'équation du temps consiste à appliquer une formule compliquée. La seconde méthode consiste à calculer une simulation de la trajectoire du soleil en divisant cette trajectoire en un grand nombre de petits bouts de trajectoire pendant lesquels on considère que l'accélération produite par le soleil sur la terre reste constante. Comme le calcul de l'équation du temps est long et fastidieux, il existe des tableaux qui donnent directement la valeur de l'équation du temps pour chaque jour de l'année.

Le cadran armillaire est un cadran solaire dont le style est parallèle à l'axe de rotation de la terre, et dont la table est un arc de cercle qui est parallèle au plan de l'équateur et dont le centre correspond au style. Le fonctionnement d'un cadran solaire armillaire est facile à comprendre, car contrairement aux autres types de cadrans solaires, la distance entre toutes les lignes horaires du cadran est la même. La ligne horaire de référence correspond à la ligne qui indique le nord, c'est-à-dire à la ligne qui est dans le plan du méridien sur lequel se trouve le style du cadran. Si un cadran solaire armillaire ne tient pas compte du système des fuseaux horaires, la ligne horaire qui indique midi est confondue avec la ligne horaire de référence. Si ce cadran tient compte du système des fuseaux horaires, la distance entre la ligne horaire qui indique midi et la ligne horaire de référence se calcule grâce à une simple formule. Si un cadran solaire armillaire tient compte de l'équation du temps, ses lignes horaires sont courbes. Dans ce travail, je présente une méthode pratique et concrète, que j'ai expérimentée moi-même en construisant mon propre cadran, qui permet de tracer les lignes horaires courbes d'un cadran solaire armillaire qui prend en compte l'équation du temps.

Finalement, je me suis intéressé aux limites de précision des cadrans solaires en construisant (avec l'aide du professeur) un cadran solaire le plus précis possible.

Liste des abréviations utilisées dans ce travail

- t= instant quelconque de l'année compté en seconde depuis l'origine du temps (l'origine du temps correspond au passage du soleil vrai au périhélie, c'est à dire au 3 janvier à 12:00)
- $\vec{r}$= vecteur allant de la terre au le soleil vrai
- x (dans le chapitre l'équation du temps)= position du soleil vrai selon l'axe x
- y (dans le chapitre l'équation du temps)= position du soleil vrai selon l'axe y
- $\vec{v}$= vitesse du soleil vrai
- $\vec{a}$= accélération du soleil vrai
- r_p= distance entre la terre et le périhélie= $1{,}470936 \cdot 10^{11}$ mètres
- r_a= distance entre la terre et l'aphélie= $1{,}520957 \cdot 10^{11}$ mètres
- e= excentricité de l'ellipse formée par la trajectoire du soleil vrai= 0,0167086
- M= masse du soleil= $1{,}9891 \cdot 10^{30}$ kg
- m= masse de la terre
- G= constante de gravitation universelle= $6{,}67259 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
- T_s= période de révolution du soleil autour de la terre= 365,25 jours= 31557600 secondes
- T_{terre}= période de rotation de la terre sur elle-même (par rapport aux étoiles)= 23 heures + 56 minutes + 4,1 secondes = 86164,1 secondes
- ω_σ= vitesse angulaire moyenne de révolution du soleil autour de la terre= $1{,}14077 \cdot 10^{-5}$ degrés/seconde= $1{,}99102 \cdot 10^{-7}$ radians/seconde
- ω_{terre}= vitesse angulaire de rotation de la terre sur elle-même (par rapport aux étoiles)= $4{,}17807 \cdot 10^{-3}$ degrés/seconde= $7{,}29212 \cdot 10^{-5}$ radians/seconde
- ω_τ= vitesse angulaire moyenne de l'ombre du style d'un cadran solaire= vitesse angulaire de rotation de la terre sur elle-même (par rapport au soleil moyen)= $4{,}16666 \cdot 10^{-3}$ degrés/seconde= $7{,}27221 \cdot 10^{-5}$ radians/seconde
- ϕ= latitude d'un point sur terre
- λ (en géographie) = longitude d'un point sur terre
- λ (en astronomie) = angle entre le soleil vrai à l'instant t et l'équinoxe de printemps (plan de l'écliptique)
- α= angle entre la projection du soleil vrai à l'instant t et l'équinoxe de printemps (plan de l'équateur)
- δ= déclinaison du soleil vrai à l'instant t= angle entre le soleil vrai et la projection du soleil vrai
- ε= angle entre le plan de l'équateur et le plan de l'écliptique= 23,439 degrés= 0,40909 radians
- f= position angulaire du soleil vrai= angle entre le soleil vrai à l'instant t et le périhélie (plan de l'écliptique)
- φ= angle entre le périhélie et l'équinoxe de printemps (plan de l'écliptique)= angle entre le soleil moyen à l'origine du temps et l'équinoxe de printemps (plan de l'équateur)= 77,0627 degrés= 1.34499 radians
- Θ= position angulaire de la projection du soleil vrai= angle entre la projection du soleil vrai à l'instant t et le soleil moyen à l'origine du temps (plan de l'équateur)
- ς= position angulaire du soleil moyen= angle entre le soleil moyen à l'instant t et le soleil moyen à l'origine du temps (plan de l'équateur)
- rayon= rayon d'un cadran solaire armillaire= distance entre le style et la table
- intervalle de temps entre les lignes horaires= graduation d'un cadran solaire en seconde
- N= numéro du fuseau horaire dans lequel se trouve un cadran solaire
- x (dans le chapitre conception d'un cadran solaire armillaire qui donne directement l'heure légale)= position de l'ombre du style d'un cadran solaire selon l'axe x
- y (dans le chapitre conception d'un cadran solaire armillaire qui donne directement l'heure légale)= position de l'ombre du style d'un cadran solaire selon l'axe y

Les mouvements du système terre-soleil

Avant de s'occuper des cadrans solaires, il faut d'abord prendre connaissance des mouvements du système terre-soleil. Le soleil et la terre tournent autour du centre de masse du système terre-soleil en formant chacun une ellipse. Cependant le centre de masse du système terre-soleil est extrêmement proche du centre du soleil car la masse du soleil (= $1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg) est beaucoup plus importante que celle de la terre (= $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg). On considère donc souvent que la terre tourne autour du soleil. Mais dans ce travail, on va considérer, pour simplifier, que c'est le soleil qui tourne autour de la terre, c'est-à-dire que la terre ne se déplace pas. Cette simplification n'a pas de conséquence dans le cadre de l'étude des cadrans solaires. Le référentiel qui est utilisé dans le cadre de l'étude des cadrans solaires est donc un référentiel qui se déplace de façon à ce que la terre reste toujours à la même position, c'est-à-dire au centre, mais qui ne tourne pas. Ce référentiel n'admet donc aucun mouvement de rotation, son orientation reste donc toujours la même. Ce référentiel est donc basé sur la terre au niveau de la translation, et sur les étoiles (qui sont considérées comme étant fixes) au niveau de la rotation.

Le plan dans lequel le soleil tourne, c'est-à-dire le plan dans lequel se trouve l'ellipse formée par la trajectoire du soleil, est appelé le plan de l'écliptique. La période de révolution du soleil autour de la terre, c'est-à-dire le temps que le soleil pour faire un tour autour de la terre, est d'environ 365,25 jours. Mais comme la trajectoire du soleil est une ellipse dont la terre correspond à l'un des foyers, la terre n'est pas toujours à la même distance du soleil. La distance terre soleil varie donc au cours de l'année. Par conséquent, à cause de la deuxième loi de Kepler, la vitesse du soleil n'est pas constante: elle varie au cours de l'année. Le soleil accélère, puis ralentit… Le mouvement de révolution du soleil autour de la terre est donc totalement irrégulier.

De plus, la terre tourne sur elle-même. Mais ni la vitesse de rotation de la terre sur elle-même ni l'orientation de son axe de rotation n'est en rapport avec le mouvement de révolution du soleil autour de la terre. La période de rotation de la terre sur elle-même, c'est-à-dire le temps que la terre met pour faire un tour sur elle-même, est de 23 heures , 56 minutes, et 4,1 secondes. Le plan de rotation de la terre sur elle-même, c'est-à-dire le plan qui est perpendiculaire à l'axe de rotation de la terre et qui passe par l'équateur terrestre, est appelé le plan de l'équateur.

L'intersection entre le plan de l'équateur et le plan de l'écliptique forme donc une droite passant par le centre de la terre. L'angle entre le plan de l'équateur et le plan de l'écliptique, noté ε, vaut 23,439 degrés, c'est-à-dire 0,40909 radians. Les points où le soleil traverse le plan de l'équateur correspondent aux équinoxes, car quand le soleil passe par ces points, il se trouve précisément au-dessus de l'équateur terrestre, et à ce moment là, la durée de la nuit est exactement la même que celle de la journée sur toute la terre. Le point où le soleil passe de l'hémisphère sud à l'hémisphère nord s'appelle le point vernal et il correspond à l'équinoxe de printemps. Le point où le soleil passe de l'hémisphère nord à l'hémisphère sud correspond à l'équinoxe d'automne. La terre tourne sur elle-même dans le même sens que celui dans lequel le soleil tourne autour de la terre. Comme la période de révolution du soleil vaut une année, et qu'elle est plus longue que celle de la terre, les mouvements du système terre-soleil se répètent tel quel d'une année à l'autre.

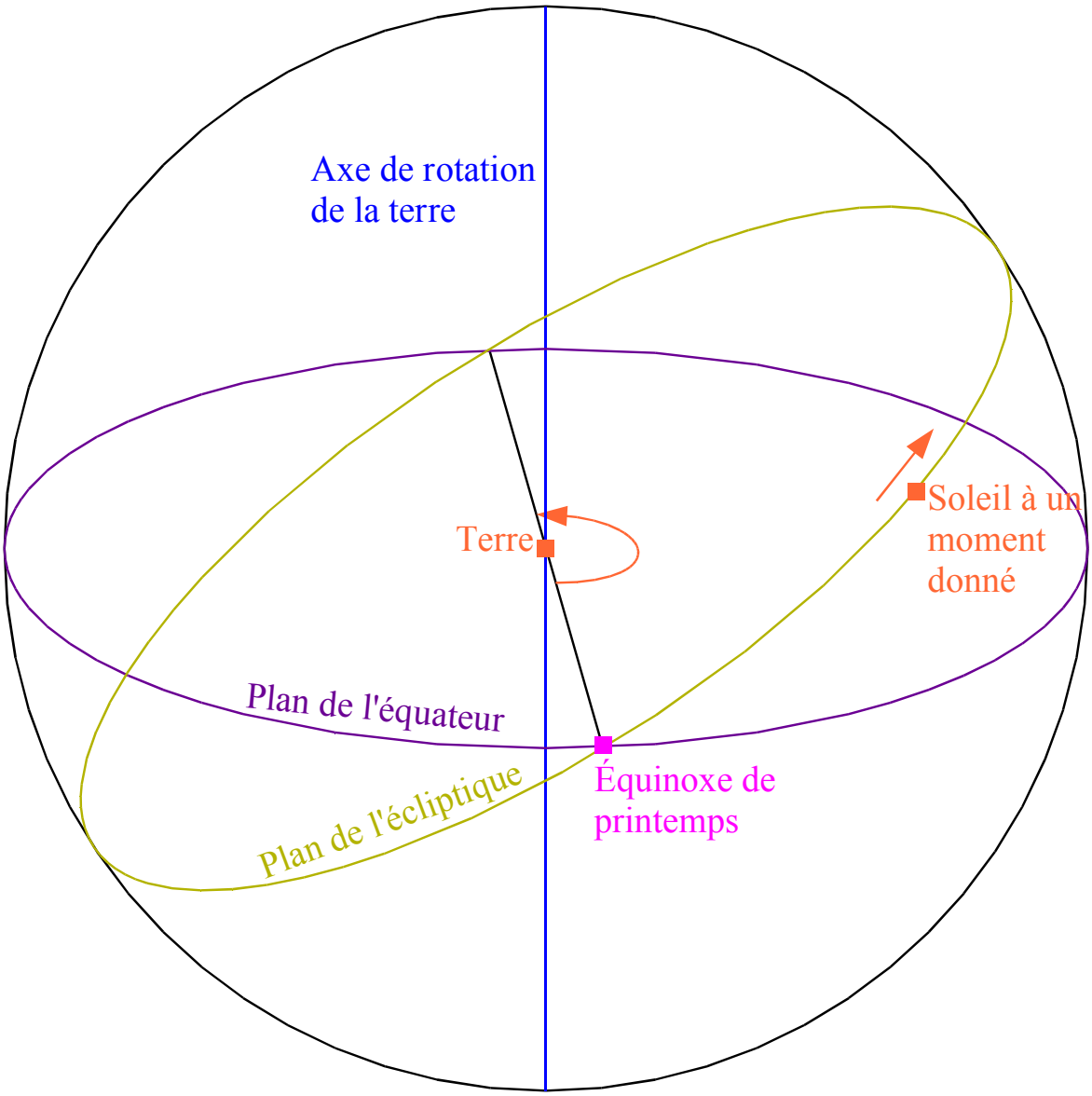


Schéma du système terre-soleil

L'heure par rapport au lieu où on se trouve

Avant la création du système des fuseaux horaires :

Avant que le système des fuseaux horaires soit instauré, la position du soleil dans le ciel au-dessus d'un lieu était directement en rapport avec l'heure de ce lieu: midi était par définition le moment de la journée où le soleil était le plus au sud, c'est-à-dire dans le plan du méridien sur lequel on se trouvait. Mais malheureusement, comme la terre est ronde, le soleil ne peut pas se trouver dans le plan de deux méridiens différents au même moment. Par conséquent, avant l'instauration du système des fuseaux horaires, l'heure changeait dès qu'on se déplaçait un petit peu. Chaque village avait sa propre heure! En fait, l'heure était la même tout au long d'un même méridien; mais elle variait selon la longitude du lieu. On subissait donc un changement d'heure quelconque à chaque petit voyage. Le fait que la terre tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (si on la regarde depuis au-dessus du pôle nord) implique que, lorsqu'on se déplaçait vers l'est, il fallait avancer sa montre, et que lorsqu'on se déplaçait vers l'ouest, il fallait reculer sa montre. On calculera dans le paragraphe Fonctionnement d'un cadran solaire -> Généralité que la vitesse angulaire de la rotation de la terre par rapport au soleil moyen, notée ω_τ, est égale à 0,004166 degrés par seconde, c'est-à-dire $7{,}272 \cdot 10^{-5}$ radians par seconde. Une vitesse angulaire s'obtient en divisant l'angle dont tourne un objet

par le temps que met cet objet à parcourir cet angle. Or quand on considère la terre qui tourne, l'angle dont elle tourne correspond à la différence de longitude, et le temps qu'elle met pour parcourir cet angle correspond au changement d'heure. Par conséquent, le changement d'heure qu'on subissait en se déplaçant d'un point à un autre était égal à :

$$\frac{\text{différence de longitude}}{\omega_\tau}$$

Par exemple, si on se déplaçait de 10 degrés de longitude vers l'est, le changement d'heure qu'on subissait était de 40 minutes; cela signifie qu'il fallait avancer sa montre de 40 minutes. Si on se déplaçait de 3 degrés de longitude vers l'ouest, le changement d'heure qu'on subissait était de 12 minutes; il fallait donc retarder sa montre de 12 minutes.

Après la création du système des fuseaux horaires :

Le système des fuseaux horaires est totalement artificiel. Ce système a été instauré en 1884 suite au développement des transports. Le système des fuseaux horaires divise la terre en 24 régions appelées fuseaux horaires et de taille à peu près égales les unes aux autres. Les frontières qui séparent les fuseaux horaires sont des méridiens séparés d'environ 15 degrés les uns des autres. L'heure est la même à l'intérieur d'un même fuseau horaire; et il y a un décalage d'une heure entre un fuseau horaire et celui d'à côté. Lorsqu'on passe d'un fuseau horaire à celui d'à côté en allant vers l'est, il faut avancer sa montre d'une heure, et lorsqu'on passe d'un fuseau horaire à celui d'à côté en allant vers l'ouest, il faut reculer sa montre d'une heure. L'heure de référence qui à été adoptée lors de la création des fuseaux horaires est l'heure de Greenwich. Cela implique que l'heure qui est utilisée dans tout le fuseau horaire dans lequel se trouve Greenwich est l'heure de Greenwich, et que le fuseau horaire de référence (= fuseau horaire numéro 0) est celui dans lequel se trouve Greenwich. A partir de ce fuseau horaire de référence, les fuseaux horaires sont numérotés négativement quand on se déplace vers l'ouest, et positivement quand on se déplace vers l'est. L'heure à n'importe quel endroit sur terre est donc directement en rapport avec l'heure de Greenwich. Pour trouver l'heure, à n'importe quel endroit sur terre, il suffit d'ajouter un nombre entier d'heures à partir de l'heure de Greenwich; et ce nombre est tous simplement égal au numéro du fuseau horaire dans lequel on se trouve. Le système des fuseaux horaires est donc extrêmement pratique dans la vie de tous les jours, mais malheureusement il complique considérablement le fonctionnement des cadrans solaires. En effet avec ce système, on ne peut plus considérer que midi est exactement le moment de la journée où le soleil passe dans le plan du méridien sur lequel on se trouve; cependant cette considération reste vraie de manière très approximative.

Introduction aux cadrans solaires

Un cadran solaire est un instrument qui permet de mesurer l'heure grâce au soleil. La rotation de la terre sur elle-même implique qu'à n'importe quel endroit sur terre, le soleil se déplace dans le ciel tout au long de la journée. La position du soleil dans le ciel est donc en rapport avec le moment de la journée. Le cadran solaire mesure donc la position du soleil dans le ciel. Un cadran solaire se compose d'un style et d'une table. Le style est un bâton opaque qui sert à faire une ombre sur la table. La table est un plan sur lequel on trace des lignes horaires. Lorsque les rayons du soleil arrivent sur le cadran solaire, le style projette son ombre sur la table. La position de l'ombre du style est, bien sûr, en rapport avec la position du soleil dans le ciel. On peut alors mesurer la position de cette ombre grâce aux lignes horaires qui sont tracées sur la table. Pour chaque ligne horaire, l'heure à laquelle elle correspond est écrite. On peut donc connaître directement l'heure en regardant la table. Mais le rapport entre la position du soleil dans le ciel et le moment de la journée reste limité, car le mouvement de révolution du soleil autour de la terre perturbe la position du soleil dans le ciel. Il faut donc ajouter un facteur de correction aux valeurs mesurées par les cadrans solaires. Ce facteur de correction s'appelle l'équation du temps. Heureusement, l'équation du temps ne dépasse jamais 16 minutes et 26 secondes. On peut donc la négliger si on n'a pas besoin de connaître l'heure précise. En plus de l'équation du temps, dans certains pays industrialisés, l'homme a instauré un système de changement d'heure. Il y a l'heure d'été et l'heure d'hiver. Ces deux périodes de l'année différent d'une heure. Il faut donc parfois rajouter ou enlever une heure à l'heure mesurée par un cadran solaire.

Il existe un grand nombre de types différents de cadrans solaires. Voici les principaux types de cadrans solaires:

- Le gnomon: c'est un simple bâton planté verticalement dans le sol. Le bâton correspond au style qui est donc vertical; et le sol correspond à la table qui est donc horizontale.
- Le cadran équatorial: c'est un cadran solaire dont le style est parallèle à l'axe de rotation de la terre, et dont la table est parallèle au plan de l'équateur.
- Le cadran armillaire: c'est un cadran solaire dont le style est parallèle à l'axe de rotation de la terre, et dont la table est un arc de cercle qui est parallèle au plan de l'équateur et dont le centre correspond au style.
- Le cadran horizontal: c'est un cadran solaire dont la table est horizontale; et dont le style est parallèle à l'axe de rotation de la terre.
- Le cadran polaire: c'est un cadran solaire dont le style et la table sont tous les deux parallèles à l'axe de rotation de la terre.
- Le cadran vertical: c'est un cadran solaire dont la table est verticale; et dont le style est parallèle à l'axe de rotation de la terre.
- Le cadran analemmatique: c'est un cadran solaire dont la table est horizontale, dont le style qui est vertical est mobile, et qui utilise un système de projections complexe. La position du style est donc modifiée tout au long de l'année.
- Le cadran de hauteur: c'est un cadran qui, contrairement aux cadrans précédents qui mesuraient l'heure à partir de la position du soleil d'est en ouest, mesure l'heure grâce à la hauteur du soleil dans le ciel.

Cadran équatorial
Châteaubernard - Charente - France
Denis SAVOIE, *Les Cadrans Solaires*,
Belin - Pour La Science, Paris 2003, page 48

Cadran vertical
Mondovi - Italie
Denis SAVOIE, *Les Cadrans Solaires*,
Belin - Pour La Science, Paris 2003, page 70

Un cadran solaire est lié au lieu où il se situe. On ne peut donc pas déplacer un cadran solaire (à moins qu'il soit réglable). Avant de construire un cadran solaire, on doit nécessairement connaître la latitude, la longitude, le numéro du fuseau horaire, et la direction du sud à l'endroit où on veut placer le cadran. Cependant, pour les cadrans de hauteur, il n'y a pas besoin de connaître la direction du sud, car ces cadrans fonctionnent seulement avec la hauteur du soleil dans le ciel. De plus, avant que le système des fuseaux horaires soit instauré, il n'y avait besoin de connaître ni la longitude ni le numéro du fuseau horaire. En effet la longitude intervient uniquement en temps que facteur de correction des erreurs engendrées par le système des fuseaux horaires).

Le but des cadrans solaires n'est pas d'être extrêmement précis. Dans l'étude des cadrans solaires, on peut donc négliger ou simplifier certains paramètres:

- Le rayon du soleil (= $6{,}95 \cdot 10^8$ mètres) est négligé, car cette distance est beaucoup plus petite que la distance terre-soleil (≥ $1{,}47 \cdot 10^{11}$ mètres). On considère donc le soleil comme un simple point sans volume.
- Le rayon de la terre (= $6{,}38 \cdot 10^6$ mètres) est, lui aussi, négligé pour la même raison que pour celui du soleil. On considère donc la terre comme un simple point sans volume. Cela implique qu'on considère que les rayons du soleil qui arrivent sur terre sont tous parallèles entre eux quel que soit l'endroit où on se trouve à la surface de la terre.
- La masse des autres planètes du système solaire est négligée, car cette masse (masse de Jupiter= $1{,}9 \cdot 10^{27}$ kg) est beaucoup moins importante que la masse du soleil (= $1{,}9 \cdot 10^{30}$ kg). Cela implique qu'on considère que ces autres planètes n'ont aucun effet sur le système terre-soleil. On considère donc que le système terre-soleil n'est pas perturbé par les autres planètes.
- Comme la grande majorité des cadrans solaires se trouvent dans l'hémisphère nord, on n'évoque quasiment jamais les cadrans solaires placés dans l'hémisphère sud. Tout ce travail ne s'applique donc qu'aux cadrans solaires placés dans l'hémisphère nord, mais il suffit de refaire les mêmes raisonnements du point de vue de l'hémisphère sud pour appliquer ce travail aux cadrans solaires de l'hémisphère sud.
- Finalement, il ne faut pas oublier que dans le cadre de l'étude des cadrans solaires, on considère toujours que c'est le soleil qui tourne autour de la terre et non l'inverse. On considère donc que la terre ne se déplace pas. Mais, bien sûr, elle tourne sur elle-même.

Fonctionnement d’un cadran solaire

Généralité

Le fonctionnement d’un cadran solaire est assez difficile à comprendre, car les différents mouvements du système terre-soleil sont compliqués et irréguliers. Le cadran solaire dont le fonctionnement est le plus simple à comprendre est le cadran armillaire. Un cadran solaire armillaire est constitué d’un style parallèle à l’axe de rotation de la terre et d’une table courbe. Contrairement à la plupart des cadrans solaires, la table d’un cadran armillaire correspond à un arc de cercle, et non à un plan. L’angle formé par l’arc de cercle engendré par la table vaut 180 degrés, c'est-à-dire π radians; il s’agit donc d’un demi-cercle. Le centre de l’arc de cercle engendré par la table correspond au style. De plus, cet arc de cercle est parallèle au plan de l’équateur. Par conséquent, le style est, non seulement, perpendiculaire à l’arc de cercle engendré par la table, mais il passe aussi par le centre de cet arc de cercle. Comme le style est au milieu de cet arc de cercle, la distance, perpendiculairement au style, entre le style et la table est la même quel que soit l’endroit de la table à partir duquel on la mesure. Cette distance s’appelle le rayon du cadran solaire. Le rayon d’un cadran solaire varie fortement d’un cadran à un autre. En effet, le rayon est choisi librement par le constructeur du cadran. Dans la plupart des cadrans, cette distance vaut entre 10 centimètres et 10 mètres.

Cadran armillaire
Cognac - Charente - France
Denis SAVOIE, *Les Cadrans Solaires*,
Belin - Pour La Science, Paris 2003, page 54

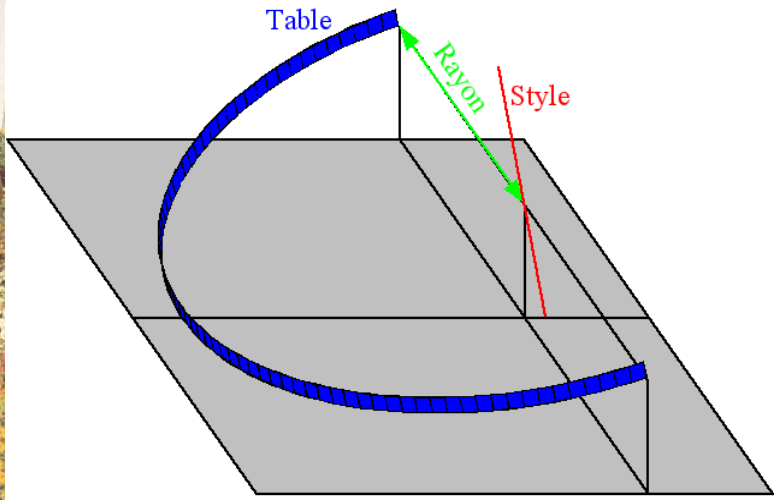


Schéma d’un cadran armillaire

Les cadrans armillaires ont l'avantage d'être à la fois simples et pratiques. Je vais donc décrire le fonctionnement d'un cadran équatorial armillaire. Cependant un problème persiste. Ce problème qui est le problème principal qui se pose avec tous les cadrans solaires, c'est que les mouvements du système terre-soleil sont totalement irréguliers et qu'ils n'ont aucun rapport entre eux. Premièrement le fait que la trajectoire du soleil soit elliptique implique que la vitesse du soleil varie au cours de l'année. Le soleil accélère, ralentit, réaccélère… de manière irrégulière. Deuxièmement le fait que le plan de l'écliptique soit penché par rapport au plan de l'équateur implique que le soleil ne se trouve pas toujours dans le plan de l'équateur. On ne peut donc pas faire de lien entre le mouvement de révolution du soleil autour de la terre et le mouvement de rotation de la terre sur elle-même. Même si, par chance, la trajectoire du soleil était un cercle et que le soleil allait toujours à la même vitesse, la vitesse du soleil vu depuis la terre varierait quand même, à cause que le plan de l'écliptique est penché par rapport au plan de l'équateur. C'est donc pour ces deux raisons que la vitesse du soleil varie au cours de l'année. Par conséquent l'ombre du style d'un cadran solaire ne va pas toujours à la même vitesse et il n'est pas possible de faire en sorte que ce soit le cas. Comme le soleil, elle ralentit, elle accélère, elle reralentit… Mais le temps officiel, c'est-à-dire celui qui est donné par les montres mécaniques va toujours à la même vitesse: une heure est toujours égale à une heure qu'on soit en hiver ou en été. Les cadrans solaires ne peuvent donc pas indiquer la même heure que les montres. Par conséquent, dans le cadre des cadrans solaires, on a été obligé de concevoir un soleil imaginaire qui n'implique pas de problème. Ce soleil imaginaire s'appelle le soleil moyen alors que le soleil réel s'appelle le soleil vrai. Le soleil moyen est une approximation du soleil vrai. La trajectoire du soleil moyen est un cercle qui se trouve dans le plan de l'équateur et dont le centre correspond à la terre. Le plan de l'écliptique du soleil moyen est donc confondu avec celui de l'équateur. De plus le soleil moyen avance toujours à la même vitesse. Par conséquent, le mouvement du soleil moyen vu depuis la terre est totalement régulier. Quand on étudie le fonctionnent d'un cadran solaire (sans s'intéresser à l'équation du temps), on s'intéresse au soleil moyen et non au soleil vrai. Quand on construit un cadran solaire, on ne s'occupe que du soleil moyen, et on le construit dans le but qu'il fonctionne avec le soleil moyen. Par conséquent tous les problèmes engendrés par la complexité des mouvements du système terre-soleil disparaissent. Mais, comme les cadrans solaires sont prévus pour fonctionner avec le soleil moyen, et qu'en réalité ils fonctionnent avec le soleil vrai (le soleil moyen n'existe pas), ils ne donnent pas la bonne heure. L'heure donnée par les cadrans solaires s'appelle l'heure solaire, alors que « la bonne heure », c'est-à-dire l'heure donnée par les montres, s'appelle l'heure légale. Heureusement il n'y a jamais plus que 16 minutes et 26 secondes de différence entre l'heure solaire et l'heure légale. De plus on peut connaître l'heure légale si on connaît l'heure solaire. Pour passer de l'une à l'autre, il suffit d'ajouter un facteur de correction qui s'appelle l'équation du temps. Mais l'équation du temps n'est pas un simple nombre qui reste toujours constant. En effet ce facteur de correction s'obtient en faisant la différence entre l'heure solaire et l'heure légale. Or le temps légal avance à vitesse constante, mais pas le temps solaire. En effet l'heure solaire est indiquée par les cadrans solaires qui fonctionnent avec le soleil vrai. Or le soleil vrai ne se déplace pas de manière régulière. Donc, selon l'heure solaire, une heure n'a pas exactement la même durée en été qu'en hiver. Par conséquent, l'équation du temps varie au cours de l'année. Heureusement, comme elle dépend des mouvements du système terre-soleil, elle se répète tel quel d'une année à l'autre. L'équation du temps se présente donc sous la forme d'un tableau de valeurs. La plupart des tableaux qui indiquent l'équation du temps donnent une valeur pour chaque jour de l'année. En résumé, il est donc tout à fait normal qu'un cadran solaire n'indique pas exactement l'heure de la montre, c'est à l'utilisateur du cadran de rajouter l'équation du temps.

Je peux maintenant décrire de manière simple le fonctionnement d'un cadran armillaire. Comme je l'ai dit plus haut, il faut s'occuper du soleil moyen et non du soleil vrai. La trajectoire du soleil moyen est un simple cercle qui se trouve dans le plan de l'équateur et dont le centre correspond à la terre. Le plan de l'écliptique du soleil moyen est donc confondu avec le plan de l'équateur. Comme pour le soleil vrai, la période de révolution du soleil moyen vaut 365,25 jours, c'est-à-dire 31557600 secondes. Comme la trajectoire du soleil moyen est un cercle dont le centre correspond au centre de la terre, la vitesse du soleil moyen est constante; le soleil moyen n'accélère pas et ne ralentit pas. Il décrit donc un mouvement circulaire uniforme dont le centre correspond à la terre. Comme le rayon de la terre est totalement négligé, le centre du cercle engendré par la trajectoire du soleil moyen correspond non seulement à la terre, mais aussi au style du cadran; c'est comme si le style et l'axe de rotation de la terre étaient confondus et que le soleil leur tournait autour dans un plan perpendiculaire à eux (le plan de l'équateur), en étant toujours à la même distance, et en allant toujours à la même vitesse. Pour mieux comprendre, on peut négliger la planète terre tout entière, et s'imaginer un cadran armillaire dont le style remplace l'axe de rotation de la terre et qui flotte dans l'espace sans se déplacer; dans ce cas, le soleil moyen tourne autour du style du cadran qui correspond en fait au centre du cercle sur lequel il tourne; de plus, l'arc de cercle engendré par la table du cadran armillaire et le cercle engendré par la trajectoire du soleil moyen se trouvent tous les deux dans le plan de l'équateur, et le style est perpendiculaire à ce plan. De plus, à n'importe quel moment, le soleil moyen, le style, et l'ombre du style sur la table sont alignés sur une même droite. Cette droite est constamment perpendiculaire au style, et elle tourne autour du style exactement comme le soleil moyen. Par conséquent, la vitesse angulaire de l'ombre du style est égale à celle du soleil moyen. Mais la terre tourne sur elle-même, et elle entraîne tous les cadrans solaires qui sont à sa surface dans ce même mouvement; il faut donc s'imaginer que le cadran, tout en flottant dans l'espace, tourne sur lui-même en ayant son propre style comme axe de rotation. La terre tourne sur elle-même dans le même sens que celui dans lequel le soleil tourne autour de la terre, et bien sûr il en est de même pour le sens de rotation du cadran. Finalement, tout se passe dans le plan de l'équateur. Comme le mouvement de révolution du soleil moyen autour du cadran et le mouvement de rotation du cadran sur lui-même sont dans le même plan et qu'ils ont la même direction, on peut facilement obtenir la vitesse angulaire de l'ombre du style sur la table du cadran solaire par simple soustraction. Cette vitesse angulaire est donc égale à la différence entre la vitesse angulaire de la rotation du cadran sur lui-même et la vitesse angulaire de la révolution du soleil moyen qui tourne autour du style. Bien entendu, la vitesse angulaire de la rotation du cadran solaire sur lui-même correspond à la vitesse angulaire de la rotation de la terre sur elle-même. Si un objet tourne sur lui-même, sa vitesse angulaire correspond à l'angle dont l'objet tourne en une seconde. Si un objet tourne sur un cercle, la vitesse angulaire correspond à l'angle au centre du cercle parcouru en une seconde. On peut donc calculer facilement une vitesse angulaire en divisant 360 (ou 2π) par la période de rotation de l'objet s'il tourne sur lui-même, ou par la période de révolution de l'objet s'il tourne sur un cercle. La vitesse angulaire du soleil moyen, notée ω_σ, est donc égale à:

$\frac{360}{T_s} = 1{,}14077 \cdot 10^{-5}$ degrés/seconde ou $\frac{2\pi}{T_s} = 1{,}99102 \cdot 10^{-7}$ radians/seconde

La vitesse angulaire de la rotation de la terre, notée ω_{terre}, est égale à:

$\frac{360}{T_{terre}} = 4{,}17807 \cdot 10^{-3}$ degrés/seconde ou $\frac{2\pi}{T_{terre}} = 7{,}29212 \cdot 10^{-5}$ radians/seconde

La vitesse angulaire de l'ombre du style d'un cadran équatorial, notée ω_τ, est donc égale à:
$\omega_\tau = \omega_{terre} - \omega_\sigma = 4{,}16666 \cdot 10^{-3}$ degrés/seconde, c'est-à-dire $7{,}27221 \cdot 10^{-5}$ radian/seconde

D'ailleurs, l'ombre du style fait le tour du cadran en un jour, c'est-à-dire qu'elle parcourt 360 degrés (2π radians) en 86400 secondes. La vitesse angulaire de l'ombre du style est donc égale à:
$\frac{360}{86400} = 4{,}16666 \cdot 10^{-3}$ degrés/seconde ou $\frac{2\pi}{86400} = 7{,}27221 \cdot 10^{-5}$ radians/seconde

Comme prévu, on obtient les mêmes résultats avec les deux méthodes. De plus, comme l'ombre du style d'un cadran solaire est directement engendrée par le soleil, la vitesse angulaire de l'ombre du style d'un cadran solaire, notée ω_τ, est aussi égale à la vitesse angulaire de la rotation de la terre sur elle-même par rapport au soleil moyen.

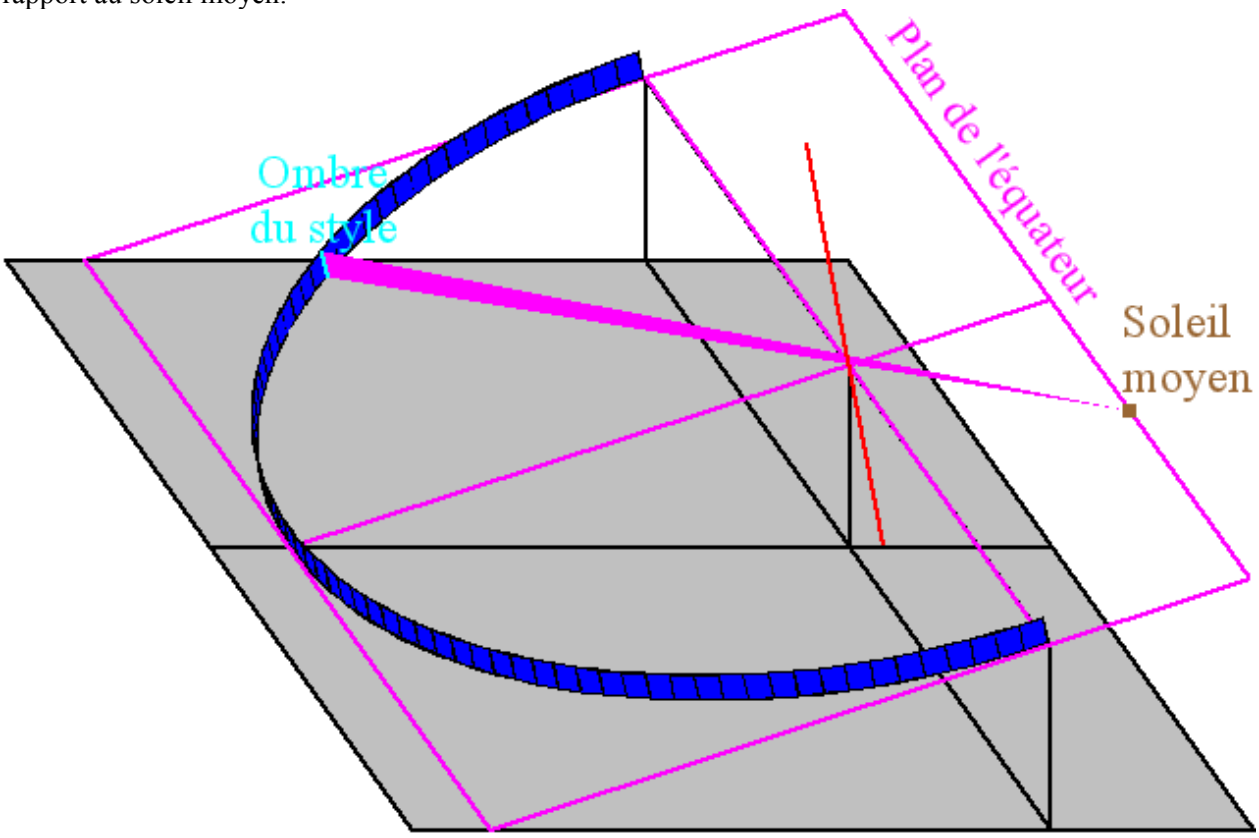


Schéma du fonctionnement d'un cadran armillaire

Grâce à la vitesse angulaire de l'ombre du style d'un cadran armillaire, on peut calculer à quelle vitesse cette ombre se déplace sur la table. La table correspond à un arc de cercle dont le centre correspond au style, et la vitesse angulaire de l'ombre du style sur le ruban est constante; le mouvement de l'ombre du style est donc un mouvement circulaire uniforme. Selon les formules du mouvement circulaire uniforme, la vitesse de cette ombre est égale à:
$\text{rayon} \cdot \omega_\tau$

Cette formule ne fonctionne qu'en radian, à partir de maintenant, on va donc travailler uniquement en radian.

L’intervalle de temps entre les lignes horaires varie d’un cadran à un autre. C’est au constructeur du cadran solaire de choisir ce paramètre. La plupart des cadrans solaires sont gradués toutes les 10 minutes, mais certains sont gradués seulement toutes les heures, et d’autres sont gradués toutes les minutes.
Comme on connaît la vitesse de l’ombre du style sur le ruban, on peut directement calculer la distance entre les lignes horaires. Cette distance est donc égale à:
rayon$\cdot\omega_{\tau}\cdot$intervalle de temps entre les lignes horaires

Par exemple, s’il y a un cadran qui est gradué toutes les 20 minutes et dont le rayon vaut 80 centimètres, il suffit d’appliquer la formule ci-dessus en sachant qu’il faut convertir toutes les unités de longueur en mètre et toutes les unités de temps en seconde. On obtient donc que les lignes horaires sont espacées de 0,0698 mètres, ce qui fait 6,98 centimètres. Cette formule permet donc de connaître directement la distance entre chaque ligne horaire. Mais comment savoir où placer la première ligne horaire?

La première ligne horaire qu’on trace quand on construit un cadran solaire est la ligne qui indique le nord, c'est-à-dire la ligne qui est dans le plan du méridien sur lequel se trouve le style du cadran. Cette ligne horaire s’appelle la ligne horaire de référence. Ensuite, la deuxième ligne horaire qu’on trace est la ligne horaire qui indique midi. Mais comment savoir où la placer?

Avant l’instauration du système des fuseaux horaires

Pour simplifier, je vais commencer par négliger le système des fuseaux horaires. Il faut donc s’imaginer qu’on se trouve avant la création du système des fuseaux horaires. A cette époque, la ligne horaire qui indiquait midi correspondait exactement à la ligne horaire de référence. La ligne horaire de référence et la ligne horaire qui indiquait midi étaient parfaitement confondues. En effet avant la création du système des fuseaux horaires, midi était par définition le moment où le soleil moyen était au sud, c'est-à-dire dans le plan du méridien sur lequel on se trouvait. La ligne horaire qui indiquait midi était donc dans le plan du méridien sur lequel se trouvait le style, à l’opposé du soleil moyen, c'est-à-dire au même endroit que la ligne horaire de référence.

Après l’instauration du système des fuseaux horaires

Cependant, le jour où le système des fuseaux horaires a été instauré, c'est-à-dire en 1884, tous les villes et villages ont dû se conformer à l’heure du fuseau horaire dans lequel ils se trouvaient. Il y eut donc un petit changement d’heure qui était, bien sûr, différent dans chaque ville et village. Par conséquent, à partir de ce jour, les cadrans solaires n’indiquaient plus la bonne heure; ils continuaient, bien sûr, à indiquer l’heure qu’ils indiquaient avant l’instauration du système des fuseaux horaires. A partir de ce jour, pour obtenir l’heure légale, il fallait donc rajouter un nouveau facteur de correction à l‘heure qu‘on lisait sur les cadrans solaires. Pour trouver l‘heure légale, il y avait donc deux facteurs de corrections à ajouter à l’heure qu’on lisait sur les cadrans. Le premier de ces deux facteurs de correction est, bien sûr, l’équation du temps. L‘équation du temps est un facteur de correction naturel; elle est engendrée par les mouvements irréguliers du système terre-soleil; elle a toujours existé, et elle existera toujours. Mais, en plus de l’équation du temps, il fallait encore rajouter le deuxième facteur de correction. Ce deuxième facteur de correction s’appelle le facteur de correction du fuseau horaire. Contrairement à l’équation du temps, il reste constant tout au long de la journée et tout au long de l’année. Mais le facteur de correction du fuseau horaire est un facteur de correction artificiel. En effet, il a été engendré par l’instauration du système des fuseaux horaires.

Le facteur de correction du fuseau horaire se compose en fait de deux sous facteurs de corrections: le premier de ces deux sous facteurs permettait de trouver l'heure de Greenwich. Une fois qu'on connaissait l'heure de Greenwich, il était facile de trouver l'heure du fuseau horaire dans lequel on se trouvait grâce au deuxième de ces deux sous facteurs. Le facteur de correction qui permettait d'obtenir l'heure de Greenwich, correspondait à la différence de temps entre l'heure brute donnée par le cadran et l'heure de Greenwich. Or l'heure brute donnée par le cadran correspondait à l'heure qui était valable avant l'instauration du système des fuseaux horaires; et l'heure de Greenwich correspondait à l'heure de Greenwich qui était valable avant l'instauration du système des fuseaux horaires (en effet, l'heure de Greenwich n'a pas changé lors de l'instauration du système des fuseaux horaires). On pouvait donc trouver cette différence de temps en utilisant la formule qui donnait le changement d'heure entre un endroit et un autre avant l'instauration des fuseaux horaires.
Ce changement d'heure était égal à:

$$\frac{\text{différence de longitude}}{\omega_\tau}$$

Cette formule a été démontrée au paragraphe: l'heure par rapport au lieu où on se trouve ->Avant la création du système des fuseaux horaires. Comme la longitude de Greenwich vaut 0, cette formule se simplifie. Le facteur de correction qu'on devait ajouter (en plus de l'équation du temps) pour avoir l'heure de Greenwich lorsqu'on lisait l'heure sur un cadran solaire était donc égal à:

$$\frac{\lambda}{\omega_\tau}$$

- La longitude du lieu où on se trouvait, notée λ, est négative à l'est, et positive à l'ouest.

Par exemple si on lit l'heure sur un cadran qui date de 1840 et qui se trouve à 70 degrés (1,222 radians) ouest, et qu'on aimerait avoir l'heure de Greenwich, il faut rajouter 16800 secondes (= 280 minutes) plus l'équation du temps à l'heure qu'on lit. Après cela, si on voulait avoir l'heure du fuseau horaire dans lequel on se trouvait, il fallait encore ajouter le deuxième sous facteur de correction. Ce deuxième sous facteur correspondait au nombre d'heure qu'il fallait ajouter à l'heure de Greenwich pour trouver l'heure de l'endroit où se trouvait le cadran. Or, pour trouver l'heure d'un endroit sur terre, il suffit d'ajouter un nombre entier d'heures à partir de l'heure de Greenwich; et ce nombre est tout simplement égal au numéro du fuseau horaire dans lequel se trouve cet endroit. Mais, comme on travaille en seconde, il fallait multiplier le numéro du fuseau horaire par 3600. Par conséquent, le deuxième sous facteur de correction était tout simplement égal au numéro du fuseau horaire où se trouvait le cadran multiplié par 3600. Finalement, le facteur de correction du fuseau horaire était donc égal à:

$$\frac{\lambda}{\omega_\tau} + N \cdot 3600$$

- Le numéro du fuseau horaire, noté N, est positif à l'est, et négatif à l'ouest.

Par exemple si on lit l'heure sur un cadran qui date de 1790 et qui se trouve dans le fuseau horaire GMT+9 à 130 degrés (2,269 radians) est, et qu'on aimerait avoir l'heure de ce fuseau horaire, il faut rajouter 1200 secondes (= 20 minutes), plus l'équation du temps à l'heure qu'on lit.

Aujourd'hui

Cependant, il était bien plus pratique de n'avoir qu'un seul facteur de correction à ajouter à l'heure qu'on lit sur un cadran solaire. Voilà pourquoi on a mis au point des cadrans solaires qui prennent en compte le système des fuseaux horaires et qui indiquent directement l'heure corrigée du facteur de correction du fuseau horaire. Aujourd'hui, bien qu'on fabrique toujours des cadrans qui ne prennent pas en compte le système des fuseaux horaires, la plupart des cadrans solaires prennent en compte le système des fuseaux horaires. La différence entre un cadran solaire qui ne prend pas en compte le système des fuseaux horaires, et un cadran qui prend en compte le système des fuseaux horaires, c'est la position de la ligne horaire qui indique midi. En effet, sur un cadran qui prend en compte le système des fuseaux horaires, la ligne horaire qui indique midi n'est plus exactement dirigée vers le nord. Par conséquent, sur un cadran qui prend en compte le système des fuseaux horaires, la ligne horaire de référence et la ligne horaire qui indique midi ne sont plus confondues. Alors comment savoir où placer la ligne horaire qui indique midi? Bien entendu, la distance entre la ligne horaire de référence et la ligne horaire qui indique midi est directement en rapport avec le facteur de correction du fuseau horaire. En effet, on connaît la vitesse de l'ombre du style. Cette vitesse est égale à:
$\text{rayon} \cdot \omega_\tau$

Par conséquent, la distance entre la ligne horaire de référence et la ligne horaire qui indique midi est égal à:
$\text{rayon} \cdot \omega_\tau \cdot$facteur de correction du fuseau horaire

Finalement, la distance entre la ligne horaire de référence et la ligne horaire qui indique midi est donc égale à:
$\text{rayon} \cdot (\lambda + (\omega_\tau \cdot N \cdot 3600))$

Lorsqu'on lit l'heure sur un cadran solaire qui prend en compte le système des fuseaux horaire, il n'y a donc plus qu'un seul facteur de correction à ajouter; il s'agit de l'équation du temps. Pour avoir l'heure légale, il suffit donc de lire l'heure sur le cadran solaire, puis d'y ajouter l'équation du temps.

Construction d'un cadran solaire

Pour construire un cadran solaire armillaire, il faut tout d'abord connaître la longitude, la latitude, et le numéro du fuseau horaire du lieu où on se trouve ainsi que la direction du nord. Comme emplacement pour un cadran armillaire, il faut un sol parfaitement plat et horizontal. Comme matériel, il faut un arc de cercle rigide de 180 degrés (= π radians) pour faire la table, et un bâton pour faire le style. Le rayon de cet arc de cercle peut être choisi librement. Comme la hauteur du soleil vrai dans le ciel varie entre l'été et l'hiver, la longueur minimale du style (sans compter la partie sous terre) doit être égale à:
$\tan(\varepsilon) \cdot \text{rayon} + \operatorname{cotan}(\phi) \cdot \text{rayon}$

On commence par planter le style dans le sol penché en direction du nord. L'angle entre le sol et le bâton doit être égal à la latitude du lieu où on se trouve. De cette façon, le style est parallèle à l'axe de rotation de la terre. Ensuite, il faut fixer l'arc de cercle de façon à ce qu'il soit perpendiculaire au style, que le style soit au milieu de cet arc de cercle, et que l'arc de cercle touche le sol en son milieu. L'endroit de l'arc de cercle qui touche le sol doit être fixer sur le sol au nord du style sur le même méridien. L'arc de cercle doit être incliné par rapport au sol d'un angle égal à 90 degrés (ou $\pi/2$ radians) moins la latitude du lieu où on se trouve. La distance entre l'arc de cercle et le style, mesurée perpendiculairement au style, doit toujours être égale au rayon de l'arc de cercle.

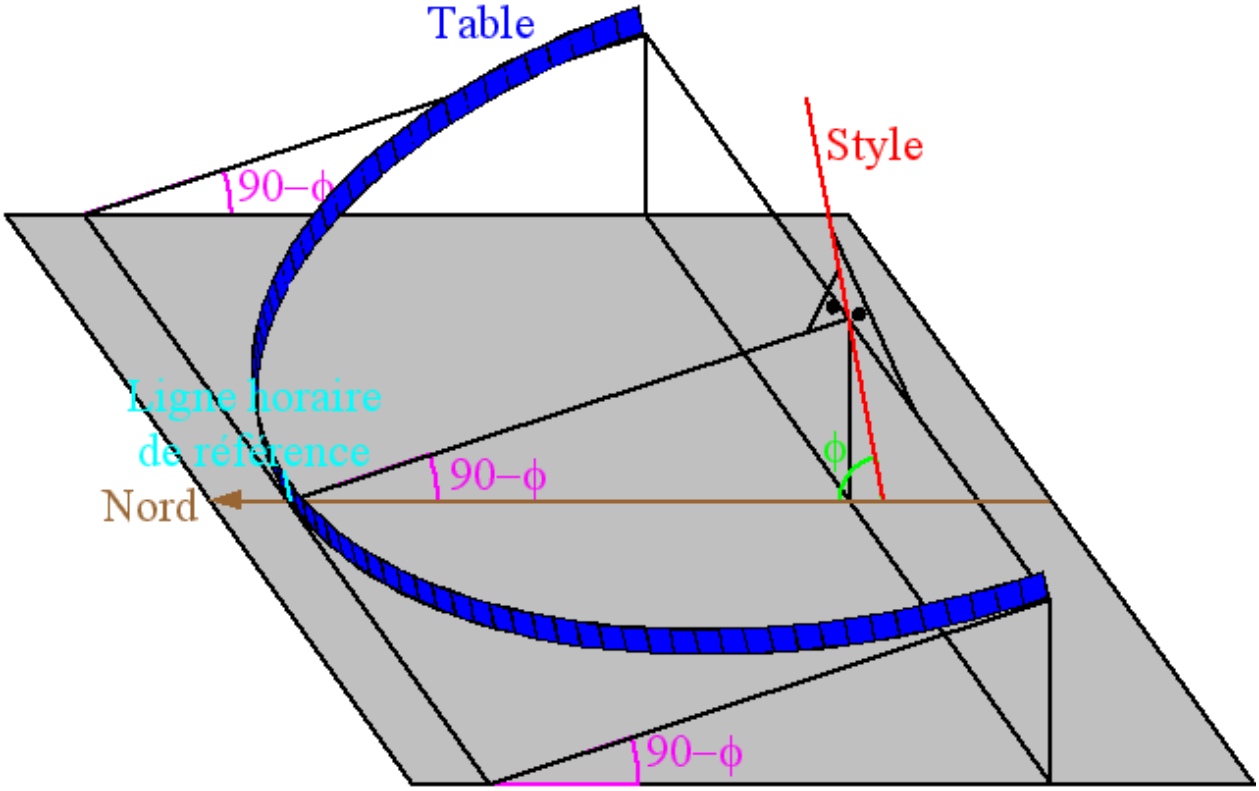


Schéma pour la construction d'un cadran solaire armillaire

Concrètement, le traçage des lignes horaires ne se fait pas directement sur le cadran. Comme la table est courbe, il faut d'abord tracer les lignes horaires sur une feuille plane de carton, de plastique, ou de papier, et coller cette feuille sur la table. Comme la table correspond à un arc de cercle de π radians, la longueur de la feuille doit être égale à:
rayon$\cdot\pi$

On trace d'abord la ligne horaire de référence. Cette ligne horaire se trouve au milieu de la feuille. Puis on trace la ligne horaire qui indique midi. La distance entre la ligne horaire de référence et celle qui indique midi doit être égale à:
rayon$\cdot(\lambda+(\omega_\tau\cdot N\cdot 3600))$

- Si la distance entre la ligne horaire de référence et la ligne horaire qui indique midi est négatif, la ligne horaire qui indique midi est à droite de la ligne de référence.

Avant de tracer les autres lignes horaires, il faut choisir l'intervalle de temps entre les lignes horaire, c'est-à-dire la graduation du cadran solaire. La plupart du temps, on gradue un cadran solaire toutes les 10 minutes. Lorsqu'on a fait ce choix, on trace toutes les autres lignes horaires. La distance entre les lignes horaires doit être égale à:
rayon$\cdot\omega_\tau\cdot$intervalle de temps entre les lignes horaires

Une fois que toutes les lignes horaires sont tracées, on les numérote, puis on colle la feuille sur la table du cadran solaire. Quand on colle la feuille, il faut fait attention à ce que la ligne horaire de référence, se trouve exactement à l'endroit où la table touche le sol, c'est-à-dire sur le même méridien que le style.

L'équation du temps

Jusqu'à maintenant je ne me suis occupé que du soleil moyen. En effet comme je l'ai écrit plus haut, quand on étudie les cadrans solaires, le soleil vrai ne nous concerne pas. Par contre, à partir du moment où on étudie l'équation du temps, on est obligé de prendre en compte le soleil vrai. L'équation du temps est un facteur de correction qui permet de trouver l'heure légale (c'est-à-dire l'heure qui est indiquée par les montres), à partir de l'heure solaire(c'est-à-dire l'heure qui est indiquée par le soleil). L'équation du temps est donc la différence entre l'heure solaire et l'heure légale. Mais le temps légal avance toujours à vitesse constante, alors que le temps solaire avance à vitesse variable à cause des mouvements irréguliers du soleil vrai. L'équation du temps varie donc au cours de l'année. Mais, heureusement, elle se répète d'une année à l'autre. Dans la plupart des tableaux qui donnent l'équation du temps, il y a une valeur pour chaque jour de l'année. Les cadrans solaires indiquent l'heure grâce au soleil vrai. Mais ils ont été conçus pour fonctionner avec le soleil moyen. Par conséquent, si le soleil moyen existait vraiment et que les cadrans solaires fonctionnaient avec, ils donneraient exactement la même heure que les montres, c'est-à-dire l'heure légale. On peut donc considérer que l'heure légale est indiquée par des cadrans solaires imaginaires qui fonctionnent avec le soleil moyen, alors que l'heure solaire est indiquée par des cadrans solaires qui fonctionnent avec le soleil vrai. Or comme l'équation du temps est la différence entre l'heure légale et l'heure solaire, elle est directement liée à la différence entre la position du soleil vrai et la position du soleil moyen. Je vais donc calculer la différence entre la position du soleil vrai et la position du soleil moyen. Pour cela, je vais commencer par calculer la position du soleil moyen. Ensuite je calculerai celle du soleil vrai.

On va se lancer dans des calculs particulièrement compliqués. Il faut donc choisir dès maintenant une origine du temps et un référentiel de position. Comme origine du temps, on choisit le moment où le soleil vrai passe au périhélie. Concrètement, cette origine du temps correspond au 3 janvier à midi. Le moment en seconde compté à partir de l'origine du temps est noté t. Un instant quelconque s'appelle l'instant t. Le moment où le soleil passe au périhélie correspond donc à l'instant t=0.

Comme référentiel de position, on choisit un référentiel angulaire. En effet, ce qui importe dans le cadre des cadrans solaire, c'est les angles et non les distances. Dans ce cas, on parle de position angulaire. La position angulaire d'un point correspond à l'angle entre l'origine des angles et ce point. Il faut donc choisir une origine des angles et un centre de référentiel angulaire. Mais le soleil vrai se trouve sur le plan de l'écliptique et le soleil moyen se trouve sur celui de l'équateur. On ne peut donc pas choisir le même référentiel de position pour le soleil moyen que pour le soleil vrai.

Comme les angles qui importent dans le cadre des cadrans solaires sont les angles dont le centre correspond au style d'un cadran solaire, et qu'on considère que le style d'un cadran solaire est confondu avec n'importe quel point de la planète terre, on choisit la terre comme centre du référentiel angulaire sur le plan de l'écliptique. Comme l'origine du temps correspond au moment où le soleil vrai passe au périhélie, on choisit le périhélie comme origine des angles pour le plan de l'écliptique. La position angulaire du soleil vrai, notée f, à l'instant t, correspond donc à l'angle, dont le centre correspond à la terre, entre le périhélie et le soleil vrai à l'instant t.

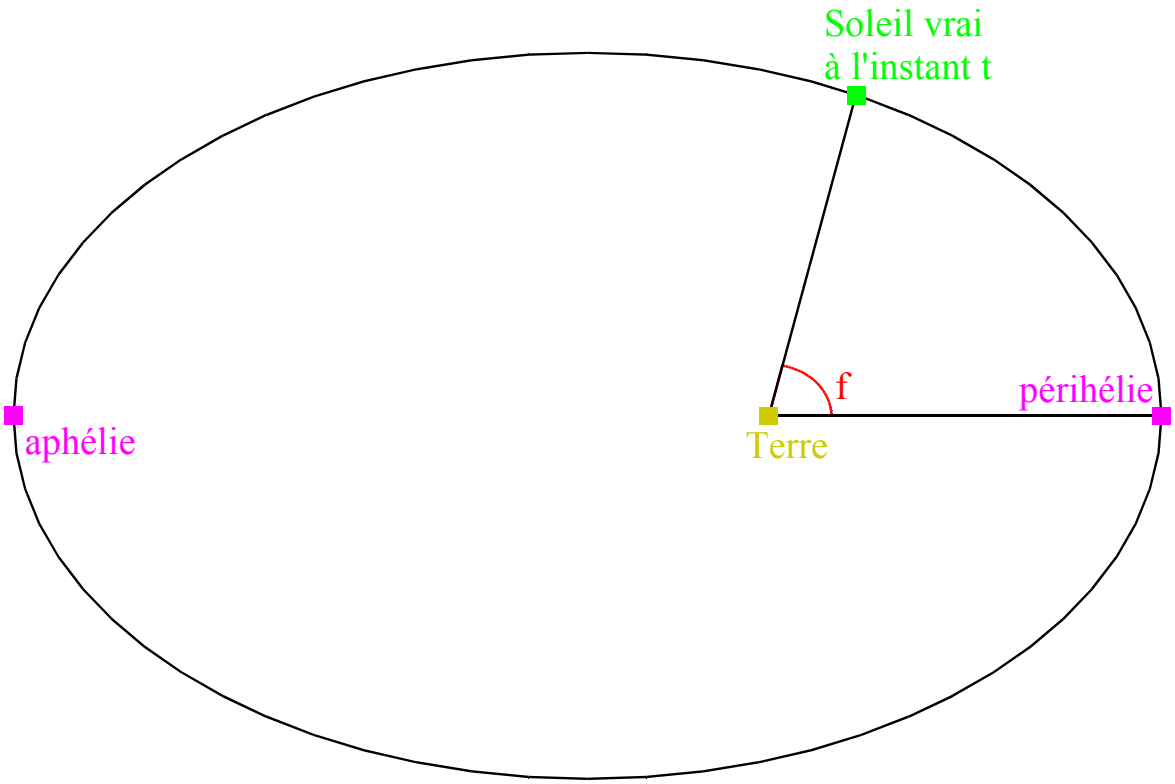


Schéma du plan de l'écliptique

Comme les angles qui importent dans le cadre des cadrans solaires sont les angles dont le centre correspond au style d'un cadran solaire, et qu'on considère que le style d'un cadran solaire est confondu avec n'importe quel point de la planète terre, on choisit la terre comme centre du référentiel angulaire sur le plan de l'équateur. Pour simplifier, on choisit, comme origine des angles pour le plan de l'équateur, le point où se trouve le soleil moyen à l'origine du temps. La position angulaire du soleil moyen, notée ζ, à l'instant t, correspond donc à l'angle, dont le centre correspond à la terre, entre le soleil moyen à l'origine du temps et le soleil moyen à l'instant t.

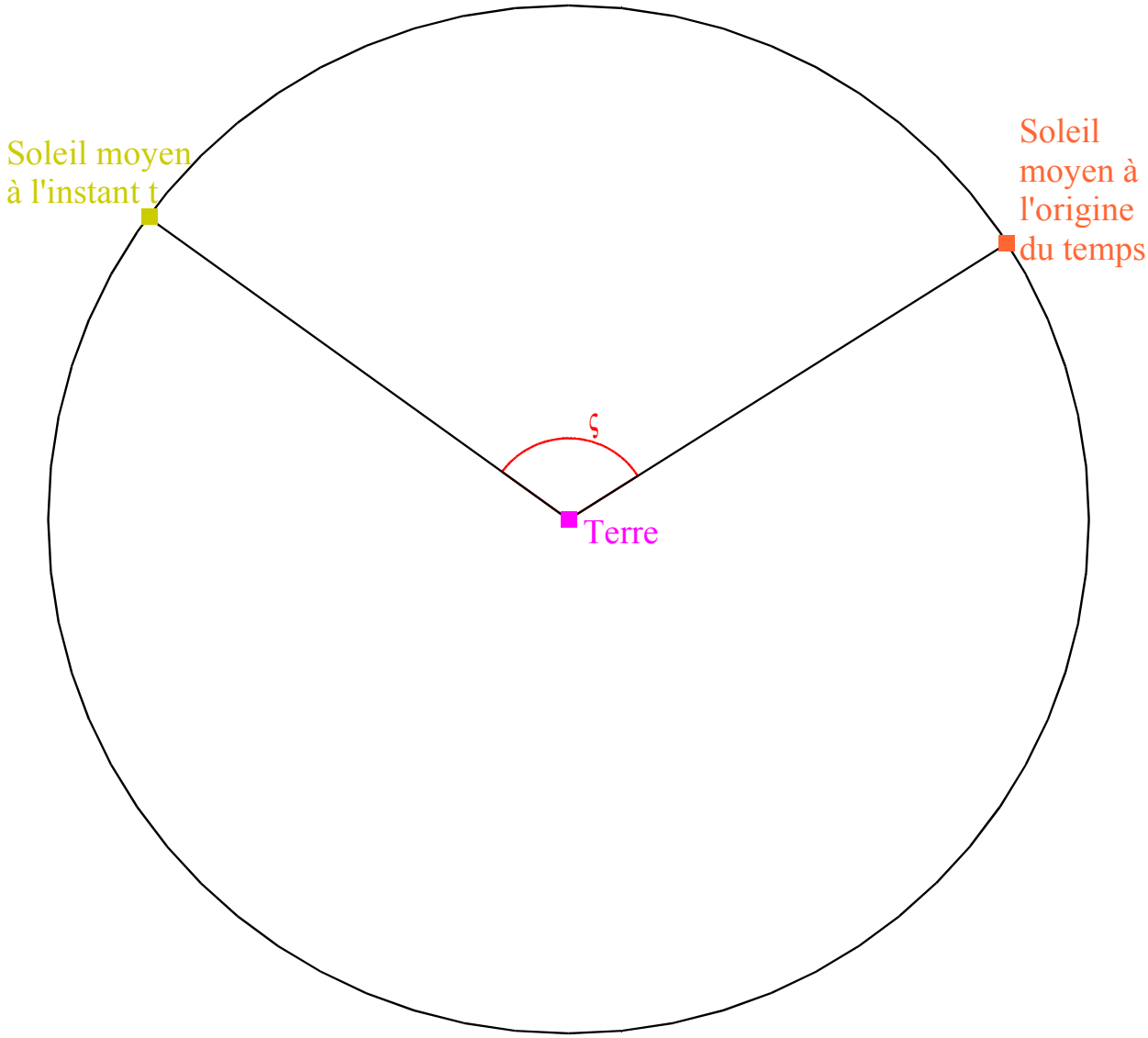


Schéma du plan de l'équateur

Calcul de la position angulaire du soleil moyen à un moment donné

La trajectoire du soleil moyen est un cercle dont le centre correspond à la terre. Et ce cercle se trouve dans le plan de l'équateur. De plus le soleil moyen avance toujours à la même vitesse. Par conséquent, selon les formules du mouvement circulaire uniforme, la position angulaire du soleil moyen, notée ζ, à l'instant t, est égal à:

$\omega_\sigma t$

Calcul de la position angulaire du soleil vrai à un moment donné

Les mouvements du système terre-soleil sont tellement compliqués qu'il n'existe pas de moyen rigoureux pour calculer précisément la position angulaire du soleil vrai, notée f, à l'instant t. Néanmoins, il existe des méthodes qui permettent d'avoir une bonne approximation de cette position angulaire. Je vais en énoncer deux:

Première méthode

Le premier moyen de calculer une approximation de la position angulaire du soleil vrai, notée f, à l'instant t consiste à appliquer une simple formule. Cependant la démonstration de cette formule est tellement complexe que je ne vais pas la démontrer dans ce travail. Néanmoins cette formule permet de calculer une très bonne approximation de la position angulaire du soleil vrai à l'instant t de manière simple et rapide. Selon cette formule, la position angulaire du soleil vrai à l'instant t vaut:

$$\omega_\sigma t + 2e\sin(\omega_\sigma t) + \frac{5e^2\sin(2\omega_\sigma t)}{4} + \frac{13e^3\sin(3\omega_\sigma t)}{12}$$

- Attention: cette formule contient l'addition d'un angle avec le sinus de lui-même, par conséquent elle ne fonctionne que si on met tous les angles en radian.

Deuxième méthode

Le deuxième moyen de calculer une approximation de la position angulaire du soleil vrai, notée f, à l'instant t consiste à effectuer une somme de termes. Ce calcul est extrêmement long et fastidieux. Il ne peut être réalisé qu'avec l'aide d'un puissant ordinateur. Mais ce calcul a l'avantage d'être facile à comprendre car il n'utilise que des formules simples, et car il est très logique. Le fait d'étudier ce calcul permet de comprendre les causes profondes et le fonctionnement exact du mouvement du soleil vrai.

Pour comprendre ce qui se passe, il faut se rappeler qu'en réalité, c'est la terre qui tourne autour du soleil et non l'inverse. Comme tous les objets qui ont une masse, le soleil émet un champ gravitationnel. La terre est donc attirée par le soleil. Par conséquent la terre subit une accélération produite par le champ gravitationnel émis par le soleil. C'est cette accélération qui est à l'origine du mouvement elliptique de la terre autour du soleil et de la variation de la vitesse de révolution de la terre autour du soleil. Selon la formule de Newton, l'accélération produite par le soleil sur la terre, notée a, est égale à:

$$\frac{G\,M}{r^2}$$

- Cette accélération est toujours dirigée vers le soleil.

Avec cette formule, on pourrait calculer la trajectoire de la terre qui tourne autour du soleil. Mais cela ne nous intéresse pas, car dans le cadre des cadrans solaires, on considère pour simplifier, que c'est le soleil qui tourne autour de la terre et non l'inverse. Cette formule va donc servir à calculer la trajectoire du soleil qui tourne autour de la terre. Cependant cette simplification n'est pas sans conséquence. En effet elle implique que si on utilise la formule ci-dessus pour calculer la trajectoire du soleil qui tourne autour de la terre, la masse M qui est présente dans cette formule correspond à la masse de la terre alors qu'en réalité, il faut identifier cette masse à la masse du soleil. Par conséquent, à chaque fois qu'on rencontre la masse de la terre ou la masse du soleil dans ce travail, il faut permuter ces deux masses entre elles. Lorsqu'on est sensé utiliser la masse de la terre (notée m), on utilise la masse du soleil (notée M); et lorsqu'on est sensé utilisé la masse du soleil, on utilise la masse de la terre. Par conséquent on considère que c'est la terre qui émet un champ gravitationnel et qui attire le soleil. On considère donc que le soleil vrai subit une accélération produite par le champ gravitationnel émit par la terre. C'est cette accélération qui est à l'origine du mouvement elliptique du soleil autour de la terre et de la variation de la vitesse de révolution du soleil autour de la terre. Selon la formule de Newton, l'accélération produite par la terre sur le soleil vrai, notée a, est donc égale à:

$$\frac{G\,M}{r^2}$$

- Cette accélération est toujours dirigée vers la terre.

Mais la distance entre la terre et le soleil, notée r, varie continuellement. Il s'agit donc de la distance entre la terre et le soleil à l'instant t. Comme l'accélération produite par la terre sur le soleil vrai dépend de cette distance, cette accélération varie continuellement de la même façon que cette distance. Il s'agit donc de l'accélération produite par la terre sur le soleil vrai à l'instant t. Il suffit donc d'exprimer la distance entre la terre est le soleil à l'instant t pour pouvoir exprimer l'accélération produite par la terre sur le soleil vrai à l'instant t. Mais cela n'est pas possible, car si on explicite la distance entre la terre et le soleil, on retombe forcément sur l'accélération produite par la terre sur le soleil vrai. On ne peut donc pas continuer le calcul. Ce problème est la raison pour laquelle il n'existe pas de moyen rigoureux pour calculer précisément la position angulaire du soleil vrai à l'instant t. Mais la méthode que je présente ici consiste à considérer que l'accélération produite par la terre sur le soleil vrai ne varie pas continuellement, c'est-à-dire qu'elle reste constante pendant un moment de durée Δt, puis qu'au bout de ce moment, elle change d'un coup pour prendre une valeur actualisée, puis qu'elle reste à nouveau constante pendant un autre moment de même durée, puis qu'elle se réactualise une nouvelle fois… Le fait de considérer que cette accélération reste constante pendant un petit moment n'est pas correct, mais cette méthode donne une bonne approximation de la position angulaire du soleil vrai. D'ailleurs il n'existe pas de méthode rigoureuse pour calculer cette position angulaire. Pendant chaque petit moment de durée Δt, le soleil vrai parcourt un petit bout de sa trajectoire. Comme le mouvement du soleil vrai est irrégulier, ces petits bouts de trajectoire sont tous différents les uns des autres. Il faut donc tous les additionner un à un pour trouver la trajectoire globale du soleil vrai. Cette méthode ne peut donc pas se faire à la main, mais il est rapide de la faire avec un ordinateur.

Cependant les formules qui sont utilisées dans ce calcul donnent la position cartésienne et non la position angulaire. Mais il est facile de trouver la position angulaire une fois qu'on connaît la position cartésienne. Il faut donc travailler en position cartésienne. Pour cela, il faut établir un référentiel de position cartésien, c'est-à-dire un système d'axe. Pour simplifier, j'ai choisi la terre comme origine de ce système d'axe. Et j'ai choisi de faire passer l'axe des x par le périhélie. L'axe des y est bien sûr perpendiculaire à l'axe des x.

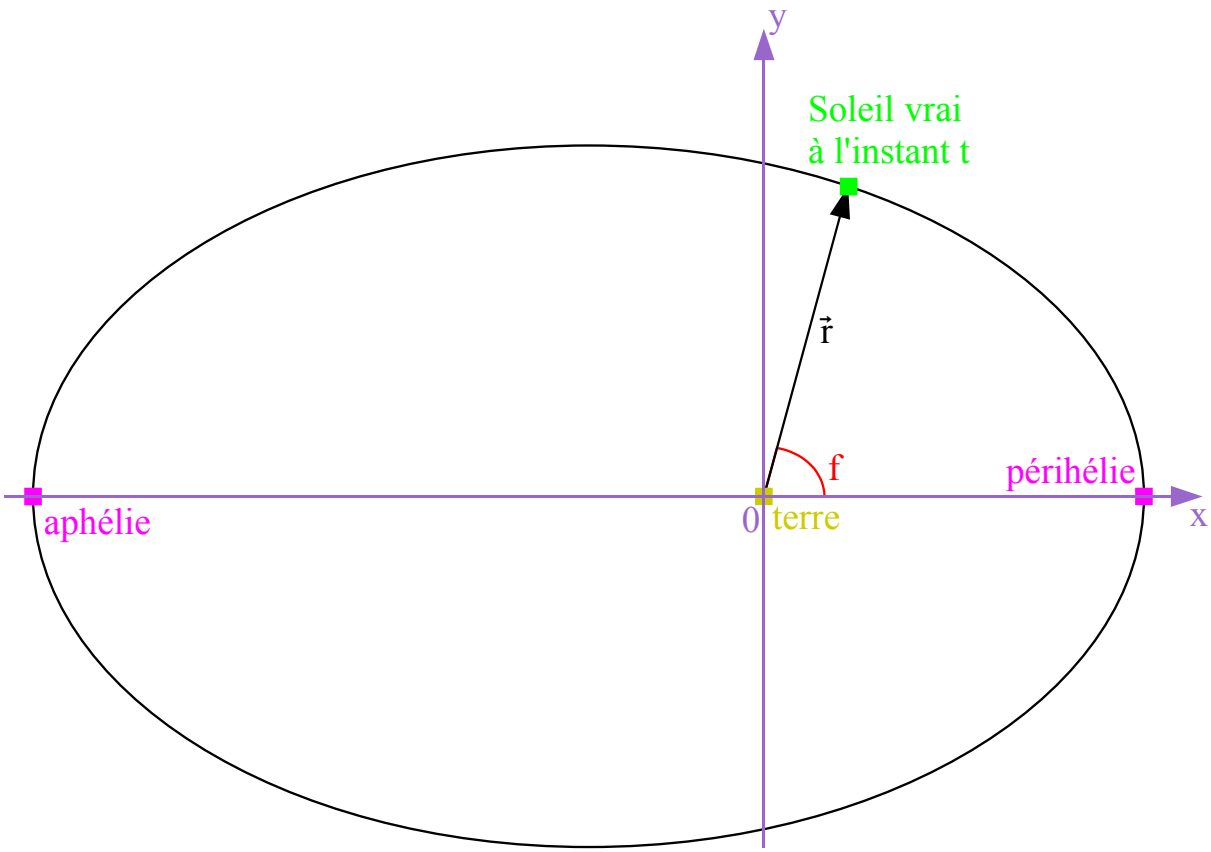


Schéma du plan de l'écliptique

Avant de démarrer le calcul, il faut tout d'abord choisir la position de départ du soleil vrai, c'est-à-dire la position à partir de laquelle on va additionner les petits bouts de trajectoire. Mais cette position doit obligatoirement se trouver sur la trajectoire du soleil vrai. Or on ne connaît ni la position des points qui sont sur cette trajectoire, ni les caractéristiques du soleil vrai lorsqu'il passe par ces points. Il y a pourtant deux points de cette trajectoire dont on connaît la position et dont on peut calculer les caractéristiques, il s'agit du périhélie et de l'aphélie. Les caractéristiques du soleil vrai lorsqu'il passe au périhélie ou à l'aphélie doivent être calculés de manière extrêmement précise, car une petite erreur sur le point de départ s'amplifie au fur et à mesure du calcul, et engendre une grande erreur à la fin du calcul.

Le périhélie et l'aphélie

La première caractéristique qu'il faut connaître est, bien sûr, la position cartésienne du périhélie. Le fait d'avoir choisi de faire passer l'axe x par le périhélie et d'avoir choisi la terre comme origine implique que la coordonnée y du périhélie vaut 0. Grâce au dessin ci-dessus, on voit que la coordonnée x du périhélie est égal à la distance entre la terre et le périhélie, notée r_p. Or on sait que cette distance vaut $1{,}470936 \cdot 10^{11}$ mètres.

La position cartésienne du périhélie est donc égale à $(1{,}470936 \cdot 10^{11};\quad 0\quad)$

La seconde caractéristique qu'il faut connaître est le moment où le soleil vrai passe par le périhélie. Le fait d'avoir choisi le moment où le soleil vrai passe au périhélie comme origine du temps implique que le soleil vrai passe au périhélie à l'instant $t = 0$.

La troisième caractéristique qu'il faut connaître est la vitesse du soleil vrai au périhélie. Le fait d'avoir choisi de faire passer l'axe x par le périhélie et d'avoir choisi la terre comme origine implique que la composante x de la vitesse du soleil vrai au périhélie vaut 0, car la tangente à l'ellipse au périhélie est parallèle à l'axe y. La composante y de cette vitesse est donc égale à sa norme. Pour calculer cette vitesse, on utilise le fait que l'énergie mécanique et le moment cinétique du soleil vrai sont constant tout au long de sa trajectoire. Le moment cinétique du soleil vrai est égal à:

$\vec{r} \wedge (m\vec{v})$

Comme le moment cinétique reste toujours constant, on peut égaler le moment cinétique du soleil vrai au périhélie et le moment cinétique du soleil vrai à l'aphélie:

$\vec{r_p} \wedge (m\vec{v_p}) = \vec{r_a} \wedge (m\vec{v_a})$

- la distance entre la terre et le périhélie, notée r_p, est égale à $1{,}470936 \cdot 10^{11}$ mètres
- La distance entre la terre et l'aphélie, notée r_a, vaut $1{,}520957 \cdot 10^{11}$ mètres

Cette égalité se simplifie facilement:

$\vec{r_p} \wedge (m\vec{v_p}) = \vec{r_a} \wedge (m\vec{v_a}) \Rightarrow r_p m v_p \sin(90) = r_a m v_a \sin(90) \Rightarrow r_p v_p = r_a v_a$

On peut ensuite exprimer la vitesse du soleil vrai à l'aphélie en fonction de la vitesse du soleil vrai au périhélie:

$$v_a = \frac{r_p v_p}{r_a}$$

L'énergie mécanique du soleil vrai est égale à:

$$0{,}5mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

Comme l'énergie mécanique reste toujours constante, on peut égaler l'énergie mécanique du soleil vrai au périhélie et l'énergie mécanique du soleil vrai à l'aphélie:

$$0{,}5mv_p^2 - \frac{GMm}{r_p} = 0{,}5mv_a^2 - \frac{GMm}{r_a}$$

Cette égalité se simplifie facilement:

$$\frac{v_p^2}{2} - \frac{GM}{r_p} = \frac{v_a^2}{2} - \frac{GM}{r_a}$$

On peut ensuite remplacer la vitesse du soleil vrai à l'aphélie par l'expression calculée avec le moment cinétique, et calculer la vitesse du soleil vrai au périhélie:

$$\frac{v_p^2}{2} - \frac{GM}{r_p} = \frac{r_p^2 v_p^2}{2r_a^2} - \frac{GM}{r_a} \Rightarrow \frac{v_p^2}{2} - \frac{r_p^2 v_p^2}{2r_a^2} = \frac{GM}{r_p} - \frac{GM}{r_a} \Rightarrow \frac{v_p^2 r_a^2 - r_p^2 v_p^2}{2r_a^2} = \frac{GM}{r_p} - \frac{GM}{r_a} \Rightarrow$$

$$\frac{\left(r_a^2 - r_p^2\right) v_p^2}{2r_a^2} = \frac{GM}{r_p} - \frac{GM}{r_a} \Rightarrow \left(r_a^2 - r_p^2\right) v_p^2 = \frac{2GMr_a^2}{r_p} - 2GMr_a \Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{2GMr_a^2}{r_p\left(r_a^2 - r_p^2\right)} - \frac{2GMr_a}{r_a^2 - r_p^2}} = 30288{,}59 \frac{m}{s}$$

La vitesse du soleil vrai au périhélie est donc égale à $\vec{v_p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30288,59 \end{pmatrix}$

La dernière valeur qu'on doit calculer avant de pouvoir commencer le calcul est l'accélération produite par la terre sur le soleil vrai lorsqu'il passe au périhélie, notée a_p. Comme cette accélération est toujours dirigée vers la terre, sa direction est parallèle à l'axe x. Par conséquent, la composante y de cette accélération vaut 0, et la composante x vaut l'opposé de la norme de cette accélération. Selon la formule de Newton, cette accélération vaut :

$$a_p = \frac{GM}{r_p^2} = 0,00613428 \frac{m}{s^2}$$

Par conséquent, l'accélération produite par la terre sur le soleil vrai lorsqu'il passe au périhélie est égale à $\vec{a_p} = \begin{pmatrix} -0,00613428 \\ 0 \end{pmatrix}$

On a maintenant toutes les données nécessaires pour pouvoir commencer le calcul qui permettra de calculer une approximation précise de la position du soleil vrai à l'instant t. Cependant il existe un deuxième point dont on peut facilement connaître les caractéristiques. Il s'agit de l'aphélie. Si on a besoin de plus de précision, il est possible d'utiliser le périhélie comme point de départ pour calculer uniquement la première moitié de la trajectoire du soleil vrai; et d'utiliser l'aphélie comme point de départ pour calculer la deuxième moitié de cette trajectoire. Mais il est plus court et plus facile de n'utiliser que le périhélie pour calculer toute la trajectoire en une fois. On utilise exactement le même principe pour calculer les caractéristiques de l'aphélie, que celui qu'on a utilisé pour calculer les caractéristiques du périhélie.

Comme on le voit sur le dessin ci-dessus, la coordonnée x de l'aphélie est égale à l'opposé de la distance entre la terre et l'aphélie, notée r_a. Or on sait que cette distance vaut $1,520957 \cdot 10^{11}$ mètres.

La position cartésienne de l'aphélie est donc égale à $(-1,520957 \cdot 10^{11};\ 0\ )$

Selon les lois de Kepler, le soleil vrai met la moitié de sa période pour parcourir la première moitié de sa trajectoire, c'est-à-dire du périhélie à l'aphélie, et la moitié de sa période pour parcourir la deuxième moitié de sa trajectoire, c'est-à-dire de l'aphélie au périhélie. Or le soleil vrai passe au périhélie à l'instant t= 0. Par conséquent, il suffit de diviser la période de révolution du soleil vrai autour de la terre par deux pour trouver à quel moment le soleil vrai passe à l'aphélie. La période de révolution du soleil vrai autour de la terre, notée T_s, vaut 365,25 jours, c'est-à-dire 31557600 secondes.
Le soleil vrai passe donc à l'aphélie à l'instant t= 15778800.

La norme de la vitesse du soleil vrai à l'aphélie a déjà été calculée de manière littérale. Cette norme est égale à:

$$v_a = \frac{r_p v_p}{r_a} = 29292,46 \frac{m}{s}$$

La vitesse du soleil vrai à l'aphélie est donc égal à $\vec{v_a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -29292,46 \end{pmatrix}$

$$a_a = \frac{GM}{r_a^2} = 0,00573743 \frac{m}{s^2}$$

Par conséquent, l'accélération produite par la terre sur le soleil vrai lorsqu'il passe à l'aphélie est égale à $\vec{a_a} = \begin{pmatrix} 0,00573743 \\ 0 \end{pmatrix}$

Calcul des caractéristiques d'un petit bout de la trajectoire du soleil vrai

Avant de pouvoir commencer le calcul, il faut encore choisir pendant combien de temps on considère que l'accélération produite par la terre sur le soleil vrai reste constante. En réalité, cette accélération varie continuellement, mais cette méthode consiste à considérer qu'elle varie par à coups en restant constante pendant un petit moment entre chaque à-coups. Il faut donc diviser la trajectoire du soleil vrai en un grand nombre de petits bouts de trajectoire. Mais il faut faire en sorte que le soleil vrai mette exactement le même temps pour parcourir chacun de ces petits bouts de trajectoire. Bien entendu, le nombre de petits bouts de trajectoire fois la durée que met le soleil vrai pour parcourir ces petits bouts de trajectoire est égal à la période de révolution du soleil vrai, c'est-à-dire à 365,25 jours ou 31557600 secondes. Moins on divise la trajectoire du soleil vrai en beaucoup de petits bouts, plus le soleil vrai met de temps pour parcourir chacun de ces petits bouts, plus le moment pendant lequel on considère que l'accélération du soleil vrai reste constante est long, donc plus on s'éloigne de la réalité, et moins le calcul est précis. Mais plus on divise la trajectoire du soleil vrai en beaucoup de petits bouts, plus le calcul est long. Dans la feuille de calculs qui est disponible en annexe, j'ai choisi de diviser la trajectoire du soleil vrai en 8766 petits bouts de trajectoire. De cette façon, le temps que le soleil vrai met pour parcourir chacun de ces petits bouts de trajectoire est égal à une heure exactement, c'est-à-dire à 3600 secondes. Je considère donc que l'accélération produite par la terre sur le soleil reste constante pendant une heure et qu'elle se réactualise toutes les heures. Il faudra donc additionner 8766 petits bouts de trajectoire. Il est donc clair que ce calcul ne peut pas se faire à la main. Si on choisit de diviser la trajectoire du soleil vrai en moins de 8766 petits bouts, l'approximation de la position du soleil vrai n'est pas assez précise. Avec 8766 petits bouts de trajectoire, l'erreur sur l'équation du temps atteint 10 secondes au maximum.

Pour traiter ce calcul, on considère l'un des petits bouts de la trajectoire du soleil vrai. Ce petit bout de trajectoire peut être situé n'importe où sur la trajectoire du soleil vrai. Le point n-1 est le point qui se situe au début de ce petit bout de trajectoire. Le point n est le point qui se situe à la fin de ce petit bout de trajectoire. Par conséquent, le point n-1 est le point qui précède le point n.

On peut calculer le vecteur correspondant à ce petit bout de trajectoire, noté $\overrightarrow{\Delta r}$, grâce aux lois de la cinématique:

$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{v}_{n-1}\Delta t + 0.5\vec{a}_{n-1}\Delta t^2 \Rightarrow \begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}vx_{n-1}\\ vy_{n-1}\end{pmatrix}\Delta t + 0.5\begin{pmatrix}ax_{n-1}\\ ay_{n-1}\end{pmatrix}\Delta t^2$$

- La vitesse du soleil vrai au point n-1 est notée v_{n-1}
- La durée pendant laquelle on considère que l'accélération produite par la terre sur le soleil vrai reste constante est notée Δt. Dans la feuille de calculs disponible en annexe, j'ai choisi une heure.
- L'accélération produite par la terre sur le soleil vrai lorsqu'il passe au point n-1 est notée a_{n-1}

Je rappelle que le temps que le soleil vrai met pour parcourir ce petit bout de trajectoire est égal à la durée pendant laquelle on considère que l'accélération produite par la terre sur le soleil vrai reste constante. Lorsqu'on commence le calcul, le point n-1 correspond au périhélie.

On peut calculer la variation de la vitesse du soleil vrai sur ce petit bout de trajectoire, notée $\overrightarrow{\Delta v}$, grâce aux lois de la cinématique (pour améliorer la précision du calcul, on utilise la moyenne entre l'accélération produite par la terre sur le soleil vrai lorsqu'il passe au point n-1 et l'accélération produite sur par la terre le soleil vrai lorsqu'il passe au point n):

$$\frac{\vec{a}_{n-1}+\vec{a}_n}{2} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} \Rightarrow \overrightarrow{\Delta v} = \frac{\vec{a}_{n-1}+\vec{a}_n}{2}\Delta t \Rightarrow \begin{pmatrix}\Delta vx\\ \Delta vy\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{ax_{n-1}+ax_n}{2}\\ \frac{ay_{n-1}+ay_n}{2}\end{pmatrix}\Delta t$$

Calcul des caractéristiques du point n

On considère toujours le petit bout de trajectoire du chapitre précédent.

On peut calculer le rayon vecteur qui représente la position du point n, noté $\vec{r}_n$, en additionnant le rayon vecteur qui représente la position du point n-1 avec le vecteur correspondant à ce petit bout de trajectoire:

$$\vec{r}_n = \vec{r}_{n-1} + \vec{v}_{n-1}\Delta t + 0.5\vec{a}_{n-1}\Delta t^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} vx_{n-1} \\ vy_{n-1} \end{pmatrix}\Delta t + 0,5\begin{pmatrix} ax_{n-1} \\ ay_{n-1} \end{pmatrix}\Delta t^2$$

On peut calculer l'instant où le soleil vrai passe au point n, en additionnant l'instant où le soleil vrai passe au point n-1 avec le temps que le soleil vrai met pour parcourir un petit bout de sa trajectoire. Or le temps que le soleil vrai met pour parcourir un petit bout de trajectoire est égal à la durée pendant laquelle on considère que l'accélération du soleil vrai reste constante.

On peut calculer la vitesse du soleil vrai au point n, notée v_n, en additionnant la vitesse du soleil vrai au point n-1 avec la variation de la vitesse du soleil vrai sur ce petit bout de trajectoire:

$$\vec{v}_n = \vec{v}_{n-1} + \frac{\vec{a}_{n-1} + \vec{a}_n}{2}\Delta t \Rightarrow \begin{pmatrix} vx_n \\ vy_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} vx_{n-1} \\ vy_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{ax_{n-1} + ax_n}{2} \\ \frac{ay_{n-1} + ay_n}{2} \end{pmatrix}\Delta t$$

On peut calculer l'accélération produite par la terre sur le soleil vrai lorsqu'il passe au point n, notée a_n, grâce au lois de Newton:

$$\vec{a}_n = \begin{pmatrix} ax_n \\ ay_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\vec{a}_n\|\cos(f_n) \\ \|\vec{a}_n\|\sin(f_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\|\vec{a}_n\|x_n}{r_n} \\ \frac{\|\vec{a}_n\|y_n}{r_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{GMx_n}{r_n^3} \\ \frac{GMy_n}{r_n^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{GMx_n}{(\sqrt{x_n^2 + y_n^2})^3} \\ \frac{GMy_n}{(\sqrt{x_n^2 + y_n^2})^3} \end{pmatrix}$$

Comme ce petit bout de trajectoire peut être identifié à n'importe quel petit bout de la trajectoire du soleil vrai et que le point n-1 est le point qui précède le point n, les formules ci-dessus permettent de connaître les caractéristiques de n'importe quel point de la trajectoire du soleil vrai à condition qu'on connaisse celles du point qui précède. Pour commencer le calcul, il faut donc considérer le petit bout de trajectoire qui part du périhélie. Par conséquent, lorsqu'on commence le calcul, le point n-1 correspond au périhélie et le point n correspond au point qui suit le périhélie. On calcule donc les caractéristiques du point n. Puis on considère le petit bout de trajectoire suivant: le point n devient le point n-1, et le point qui le suit devient le point n. Puis on calcule les caractéristiques de ce nouveau point. Puis on considère à nouveau le petit bout de trajectoire suivant: le point n devient le point n-1, et le point qui le suit devient le point n… On calcule donc un à un tous les points de la trajectoire du soleil vrai de cette manière, jusqu'à ce que le soleil vrai arrive à nouveau au périhélie. Or on sait que le soleil vrai part du périhélie à l'instant t=0, et qu'il met 365,25 jours, c'est-à-dire 31557600 secondes, pour faire le tour complet de sa trajectoire. Il faut donc stopper le calcul à l'instant t=31557600. Théoriquement les caractéristiques du point où se trouve le soleil vrai à l'instant t=31557600 sont exactement les mêmes que celles du périhélie, car ce point correspond au périhélie. Mais comme cette méthode n'est qu'une approximation, il est normal qu'il y ait des petites différences entre ces deux points. On peut se rendre compte très facilement de l'erreur maximale du calcul en comparant ces deux points.

Si on fait le calcul en deux parties, il faut stopper le calcul lorsque le soleil vrai arrive à l'aphélie. Or on sait que le soleil vrai passe à l'aphélie à l'instant t= 15778800. Il faut donc stopper le calcul à l'instant t= 15778800. Puis il faut recommencer la deuxième partie du calcul en considérant le petit bout de trajectoire qui part de l'aphélie. Lorsqu'on commence la deuxième partie du calcul, l'aphélie correspond donc au point n-1, et le point qui le suit correspond au point n. On calcule donc les caractéristiques du point n, et on recommence avec le petit bout de trajectoire suivant… On calcule la deuxième partie de la trajectoire du soleil vrai exactement de la même façon que la première. Finalement, on stoppe le calcul lorsque le soleil vrai arrive à nouveau au périhélie, c'est-à-dire à l'instant t=31557600.

Pour avoir un exemple concret de cette méthode de calcul, une feuille de calculs contenant l'équation du temps calculée avec cette méthode est disponible en annexe.

Voici un extrait de cette feuille de calculs:

t	Moment			vx	vy	x	y	ax	ay	f	Équa. temps	
Seconde	Heure	Jour	Mois	m/s	m/s	mètre	mètre	m/s2	m/s2	Radian	Minute	Seconde
0	12	3	janvier	0.00	30'288.59	1.470936E+11	0.000000E+00	-0.0061343	0.0000000	0.0000	4	29
3600	13	3	janvier	-22.08	30'288.58	1.470936E+11	1.090389E+08	-0.0061343	-0.0000045	0.0007	4	30
7200	14	3	janvier	-44.17	30'288.56	1.470934E+11	2.180778E+08	-0.0061343	-0.0000091	0.0015	4	31
10800	15	3	janvier	-66.25	30'288.52	1.470932E+11	3.271165E+08	-0.0061343	-0.0000136	0.0022	4	32
15746400	12	4	juillet	-180.57	-29'291.91	-1.520929E+11	9.219112E+08	0.0057373	-0.0000348	3.1355	4	27
15750000	13	4	juillet	-159.92	-29'292.03	-1.520935E+11	8.164601E+08	0.0057373	-0.0000308	3.1362	4	28
15753600	14	4	juillet	-139.26	-29'292.14	-1.520940E+11	7.110086E+08	0.0057374	-0.0000268	3.1369	4	28
15757200	15	4	juillet	-118.61	-29'292.23	-1.520945E+11	6.055567E+08	0.0057374	-0.0000228	3.1376	4	29
15760800	16	4	juillet	-97.95	-29'292.30	-1.520949E+11	5.001046E+08	0.0057374	-0.0000189	3.1383	4	29
15764400	17	4	juillet	-77.30	-29'292.36	-1.520952E+11	3.946522E+08	0.0057374	-0.0000149	3.1390	4	30
15768000	18	4	juillet	-56.64	-29'292.41	-1.520954E+11	2.891996E+08	0.0057374	-0.0000109	3.1397	4	30
15771600	19	4	juillet	-35.99	-29'292.44	-1.520956E+11	1.837468E+08	0.0057374	-0.0000069	3.1404	4	30
15775200	20	4	juillet	-15.34	-29'292.46	-1.520957E+11	7.829399E+07	0.0057374	-0.0000030	3.1411	4	31
15778800	21	4	juillet	5.32	-29'292.46	-1.520957E+11	-2.715888E+07	0.0057374	0.0000010	3.1418	4	31
15782400	22	4	juillet	25.97	-29'292.45	-1.520957E+11	-1.326117E+08	0.0057374	0.0000050	3.1425	4	32
15786000	23	4	juillet	46.63	-29'292.43	-1.520955E+11	-2.380645E+08	0.0057374	0.0000090	3.1432	4	32
15789600	0	5	juillet	67.28	-29'292.39	-1.520953E+11	-3.435172E+08	0.0057374	0.0000130	3.1439	4	33
15793200	1	5	juillet	87.94	-29'292.33	-1.520950E+11	-4.489697E+08	0.0057374	0.0000169	3.1445	4	33
15796800	2	5	juillet	108.59	-29'292.26	-1.520947E+11	-5.544220E+08	0.0057374	0.0000209	3.1452	4	33
15800400	3	5	juillet	129.25	-29'292.18	-1.520943E+11	-6.598740E+08	0.0057374	0.0000249	3.1459	4	34
15804000	4	5	juillet	149.90	-29'292.08	-1.520938E+11	-7.653257E+08	0.0057374	0.0000289	3.1466	4	34
15807600	5	5	juillet	170.56	-29'291.97	-1.520932E+11	-8.707770E+08	0.0057373	0.0000328	3.1473	4	35
15811200	6	5	juillet	191.21	-29'291.85	-1.520925E+11	-9.762279E+08	0.0057373	0.0000368	3.1480	4	35
15814800	7	5	juillet	211.87	-29'291.71	-1.520918E+11	-1.081678E+09	0.0057373	0.0000408	3.1487	4	36
15818400	8	5	juillet	232.52	-29'291.55	-1.520910E+11	-1.187128E+09	0.0057373	0.0000448	3.1494	4	36
15822000	9	5	juillet	253.17	-29'291.39	-1.520901E+11	-1.292577E+09	0.0057372	0.0000488	3.1501	4	37
15825600	10	5	juillet	273.83	-29'291.20	-1.520892E+11	-1.398026E+09	0.0057372	0.0000527	3.1508	4	37
15829200	11	5	juillet	294.48	-29'291.01	-1.520882E+11	-1.503474E+09	0.0057372	0.0000567	3.1515	4	37
15832800	12	5	juillet	315.14	-29'290.79	-1.520871E+11	-1.608921E+09	0.0057371	0.0000607	3.1522	4	38
31546800	9	3	janvier	54.87	30'288.54	1.470934E+11	-2.709435E+08	-0.0061343	0.0000113	6.2813	4	31
31550400	10	3	janvier	32.79	30'288.57	1.470935E+11	-1.619047E+08	-0.0061343	0.0000068	6.2821	4	32
31554000	11	3	janvier	10.71	30'288.59	1.470936E+11	-5.286581E+07	-0.0061343	0.0000022	6.2828	4	33
31557600	12	3	janvier	-11.38	30'288.59	1.470936E+11	5.617312E+07	-0.0061343	-0.0000023	6.2836	4	34

Légende:

Grâce à ce calcul, on connaît la position cartésienne de tous les points de la trajectoire du soleil vrai ainsi que l'instant où le soleil vrai passe par ces points. Par conséquent, on connaît la position cartésienne du soleil vrai à l'instant t. Mais ce qui importe dans le cadre des cadrans solaires, c'est la position angulaire du soleil vrai, notée f, à l'instant t. On convertit facilement cette position cartésienne en position angulaire grâce à la trigonométrie:

$\tan(f)=y/x \Rightarrow f=\arctan(y/x)$

- Les coordonnées du soleil vrai sont notées x et y
- L'arc tangente d'un angle peut prendre plusieurs valeurs à la fois, or dans certains cas, l'ordinateur ne choisit pas la bonne valeur, il faut donc parfois rajouter π radians ou 2π radians aux valeurs indiquées par l'ordinateur.

Projection du soleil vrai sur le plan de l'équateur

Pour calculer l'équation du temps, il faut faire la différence entre la position angulaire du soleil vrai et la position angulaire du soleil moyen. Mais le soleil vrai se trouve sur le plan de l'écliptique, alors que le soleil moyen se trouve sur le plan de l'équateur. Et il y a un angle de 23,439 degrés, c'est-à-dire 0,40909 radian, entre ces deux plans. La position angulaire du soleil vrai n'a donc aucun rapport avec celle du soleil moyen. On ne peut donc pas faire la différence entre la position angulaire du soleil vrai et la position angulaire du soleil moyen pour le moment. En plus, le fait que le plan de l'écliptique soit penché par rapport au plan de l'équateur implique que, même si la trajectoire du soleil vrai était un cercle dont le centre correspondait à la terre, et que le soleil vrai allait toujours à la même vitesse, l'ombre du style d'un cadran solaire n'irait quand même pas à vitesse constante à cause que les rayons du soleil vrai ne sont pas perpendiculaires au style. Quand on a voulu savoir à quelle vitesse angulaire avançait l'ombre du style d'un cadran, on a soustrait la vitesse angulaire de révolution du soleil moyen à la vitesse angulaire de rotation de la terre. Le fait que le style du cadran et l'axe de rotation de la terre étaient perpendiculaires au plan dans lequel tournait le soleil moyen justifiait cette soustraction. Mais si on s'était occupé du soleil vrai, on n'aurait pas pu faire cette soustraction, car le plan dans lequel tourne le soleil vrai, c'est-à-dire le plan de l'écliptique, n'est perpendiculaire ni à l'axe de rotation de la terre ni au style d'un cadran solaire. Or les cadrans solaires fonctionnent avec le soleil vrai. Le fait d'avoir soustrait ces deux vitesses angulaires entraîne donc une erreur. Il faut donc corriger cette erreur avec un nouveau facteur de correction. Ce nouveau facteur de correction est, en fait, directement inclus dans l'équation du temps. L'équation du temps se compose donc de deux sous facteurs de correction. Le premier de ces deux sous facteur s'appelle l'équation du centre. Il permet de corriger l'erreur due au fait que le soleil vrai se trouve sur une ellipse dont la terre correspond à l'un des foyers. Le deuxième de ces deux sous facteur s'appelle la réduction à l'équateur. Il permet de corriger l'erreur due au fait que le plan de l'écliptique est penché par rapport au plan de l'équateur. Actuellement, je me suis occupé de l'équation du centre, mais pas encore de la réduction à l'équateur. Mais d'abord il faut mettre en rapport le mouvement de rotation de la terre avec le mouvement de révolution du soleil vrai.

Comme on doit mettre en rapport la position angulaire du soleil vrai avec la position angulaire du soleil moyen, et que ces deux positions angulaires ne sont pas dans le même plan, il faut projeter le soleil vrai sur le plan de l'équateur. Et, ce qu'il y a de bien, c'est que le fait d'effectuer cette projection corrige automatiquement l'erreur engendrée par l'inclinaison du plan de l'écliptique sur le plan de l'équateur. En effet, calculer la réduction à l'équateur consiste à projeter le soleil vrai sur le plan de l'équateur. Mais on ne peut pas projeter le soleil vrai sur le plan de l'équateur n'importe comment. Il faut faire en sorte que lorsqu'on effectue cette projection, la position de l'ombre du style d'un cadran solaire reste inchangée. Il faut donc que l'ombre du style engendrée par le soleil vrai et l'ombre du style engendrée par la projection du soleil vrai sur le plan de l'équateur soit confondue. Pour cela, il faut que cette projection se fasse parallèlement au style d'un cadran solaire, c'est-à-dire parallèlement à l'axe de rotation de la terre. Or l'axe de rotation de la terre est perpendiculaire au plan de l'équateur. La projection du soleil vrai sur le plan de l'équateur doit donc se faire perpendiculairement au plan de l'équateur. Il s'agit donc de la projection orthogonale du soleil vrai sur le plan de l'équateur. Mais on ne connaît pas la position cartésienne du soleil vrai. On ne connaît que sa position angulaire. Or la position angulaire du soleil vrai correspond à l'angle, dont le centre correspond à la terre, entre le périhélie, et le soleil vrai. Il faut donc projeter cet angle orthogonalement sur le plan de l'équateur. Mais on ne peut faire cette projection angulaire que si l'angle qu'on veut projeter est entre un point qui se trouve dans le plan sur lequel on veut le projeter et un point

quelconque. Or ce n'est pas le cas. Pour que ce soit le cas, il faut travailler avec l'angle, dont le centre correspond à la terre, entre l'équinoxe de printemps et le soleil vrai. En effet, l'équinoxe de printemps se trouve à la fois dans le plan de l'écliptique et dans le plan de l'équateur. Il faut donc calculer l'angle, dont le centre correspond à la terre, entre l'équinoxe de printemps et le soleil vrai à l'instant t. Cet angle est noté λ.

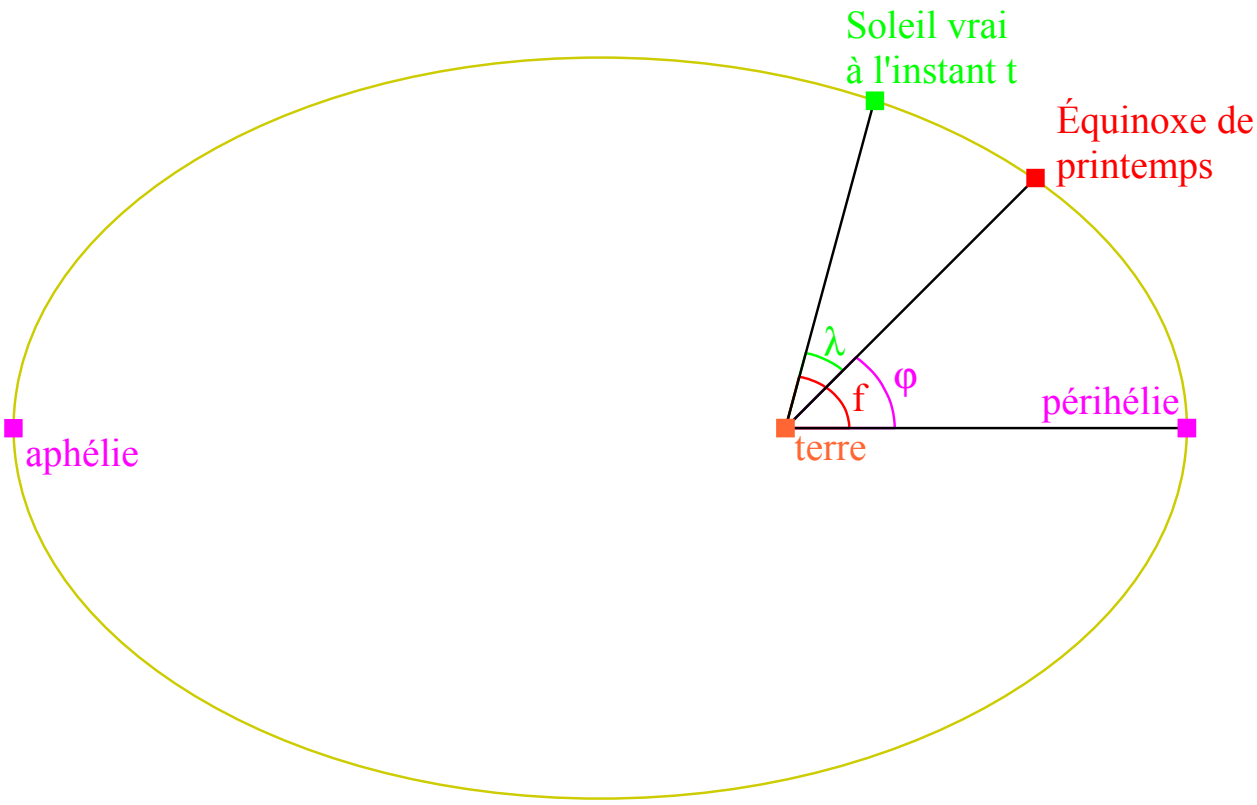


Schéma du plan de l'écliptique

On voit, grâce au dessin ci-dessus, que l'angle, dont le centre correspond à la terre, entre l'équinoxe de printemps et le soleil vrai, noté λ, est égal à:
$\lambda = f - \varphi$

- Quand le soleil vrai se trouve entre le périhélie est l'équinoxe de printemps, $\lambda = f - \varphi + 360$

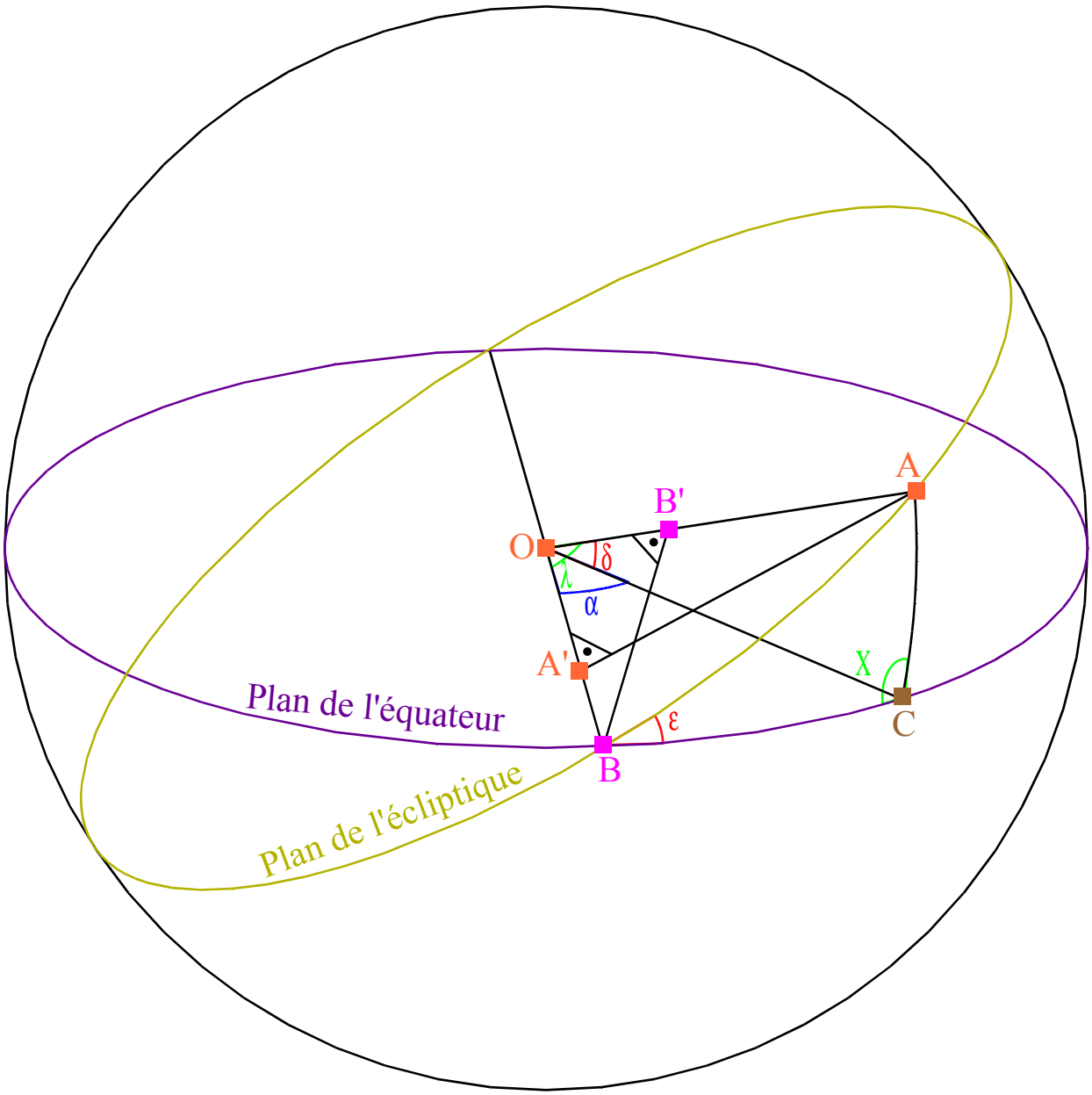


Schéma pour la projection angulaire

Comme l'équinoxe de printemps se trouve sur le plan de l'équateur, on peut projeter cet angle sur le plan de l'équateur. Pour effectuer cette projection angulaire, on s'imagine une sphère de rayon quelconque dont le centre correspond au centre de l'angle qu'on veut projeter, c'est-à-dire à la terre. Comme le centre de cette sphère correspond à la terre, on voit le plan de l'écliptique et le plan de l'équateur qui découpent la sphère. On voit aussi la ligne d'intersection entre le plan de l'équateur et le plan de l'écliptique. Cette ligne relie la terre, notée O, à l'équinoxe de printemps, noté B. L'angle qu'on veut projeter sur le plan de l'équateur, noté λ, correspond donc à l'angle entre cette ligne et un point quelconque situé dans le plan de l'écliptique. Ce point quelconque, noté A, symbolise le soleil vrai à l'instant t. La projection orthogonale du soleil vrai sur le plan de l'équateur est symbolisée par le point C. Pour projeter l'angle, entre l'équinoxe de printemps et le soleil vrai, sur le plan de l'équateur, on calcule le produit scalaire de $\overrightarrow{OB}$ avec $\overrightarrow{OA}$ de deux manières différentes: Voici la première manière:

$\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{OA}=(\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{B'B})\bullet(\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'A})=\overrightarrow{OB'}\bullet\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}\bullet\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{B'B}\bullet\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{B'B}\bullet\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{OB'}\bullet\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{B'B}\bullet\overrightarrow{A'A}=$

$OB'\cdot OA'\cdot\cos(0)+B'B\cdot A'A\cdot\cos(X)=OB'\cdot OA'+B'B\cdot A'A\cdot\cos(X)=$

$\cos(\alpha)\cdot OB\cdot\cos(\delta)\cdot OA+\sin(\alpha)\cdot OB\cdot\sin(\delta)\cdot OA\cdot\cos(X)$

Voici la deuxième manière:

$\overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{OA} = OB \cdot OA \cdot \cos(\lambda)$

Ces deux résultats sont égaux, car ils sont tous les deux égales à $\overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{OA}$. On peut donc les égaler:

$\cos(\alpha) \cdot OB \cdot \cos(\delta) \cdot OA + \sin(\alpha) \cdot OB \cdot \sin(\delta) \cdot OA \cdot \cos(X) = OB \cdot OA \cdot \cos(\lambda) \Rightarrow$
$\cos(\alpha)\cos(\delta) + \sin(\alpha)\sin(\delta)\cos(X) = \cos(\lambda)$

L'équation ainsi obtenue est la première des trois relations principales de la trigonométrie sphérique. Par permutation cyclique, on obtient la deuxième relations principales de la trigonométrie sphérique :

$\cos(\lambda)\cos(\alpha) + \sin(\lambda)\sin(\alpha)\cos(\varepsilon) = \cos(\delta)$

La troisième relation principale de la trigonométrie sphérique est inutile dans le cadre des cadrans solaires.

Comme l'angle δ ne nous intéresse pas, on substitue $\cos(\delta)$ dans la première relation principale de la trigonométrie sphérique par la deuxième relation principale de la trigonométrie sphérique :

$\cos(\lambda) = \cos(\alpha)(\cos(\lambda)\cos(\alpha) + \sin(\lambda)\sin(\alpha)\cos(\varepsilon)) + \sin(\alpha)\sin(\delta)\cos(X)$

La projection angulaire du soleil vrai sur le plan de l'équateur doit être orthogonale, c'est-à-dire que le soleil vrai est projeté perpendiculairement au plan de l'équateur. Par conséquent, l'angle X vaut 90 degrés. Cela implique que l'équation ci-dessus se simplifie, car $\cos(90) = 0$:

$\cos(\lambda) = \cos(\alpha)(\cos(\lambda)\cos(\alpha) + \sin(\lambda)\sin(\alpha)\cos(\varepsilon))$

Cette équation contient seulement les angles qui nous sont utiles. On peut donc exprimer α en fonction de ε et de λ :

$\cos(\lambda) = \cos(\alpha)(\cos(\lambda)\cos(\alpha) + \sin(\lambda)\sin(\alpha)\cos(\varepsilon)) \Rightarrow$
$\cos(\lambda) = \cos^2(\alpha)\cos(\lambda) + \cos(\alpha)\sin(\lambda)\sin(\alpha)\cos(\varepsilon) \Rightarrow$
$1 = \cos^2(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(\alpha)\tan(\lambda)\cos(\varepsilon) \Rightarrow$
$1 = 1 - \sin^2(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(\alpha)\tan(\lambda)\cos(\varepsilon) \Rightarrow$
$\sin^2(\alpha) = \cos(\alpha)\sin(\alpha)\tan(\lambda)\cos(\varepsilon) \Rightarrow$
$\sin(\alpha) = \cos(\alpha)\tan(\lambda)\cos(\varepsilon) \Rightarrow$
$\tan(\alpha) = \tan(\lambda) * \cos(\varepsilon) \Rightarrow$
$\alpha = \arctan(\tan(\lambda) * \cos(\varepsilon))$

- L’angle α correspond à la projection sur le plan de l’équateur de l’angle, dont le centre correspond à la terre, entre le soleil vrai et l’équinoxe de printemps. Mais, grâce au dessin ci-dessous, on voit que cet angle correspond aussi à l’angle, dont le centre correspond à la terre, entre l’équinoxe de printemps et la projection du soleil vrai sur le plan de l’équateur.
- L’arc tangente d’un angle peut prendre plusieurs valeurs à la fois, or dans certains cas, l’ordinateur ou la calculette ne donne pas la bonne valeur, il faut donc parfois rajouter π radians ou 2π radians aux valeurs indiquées.

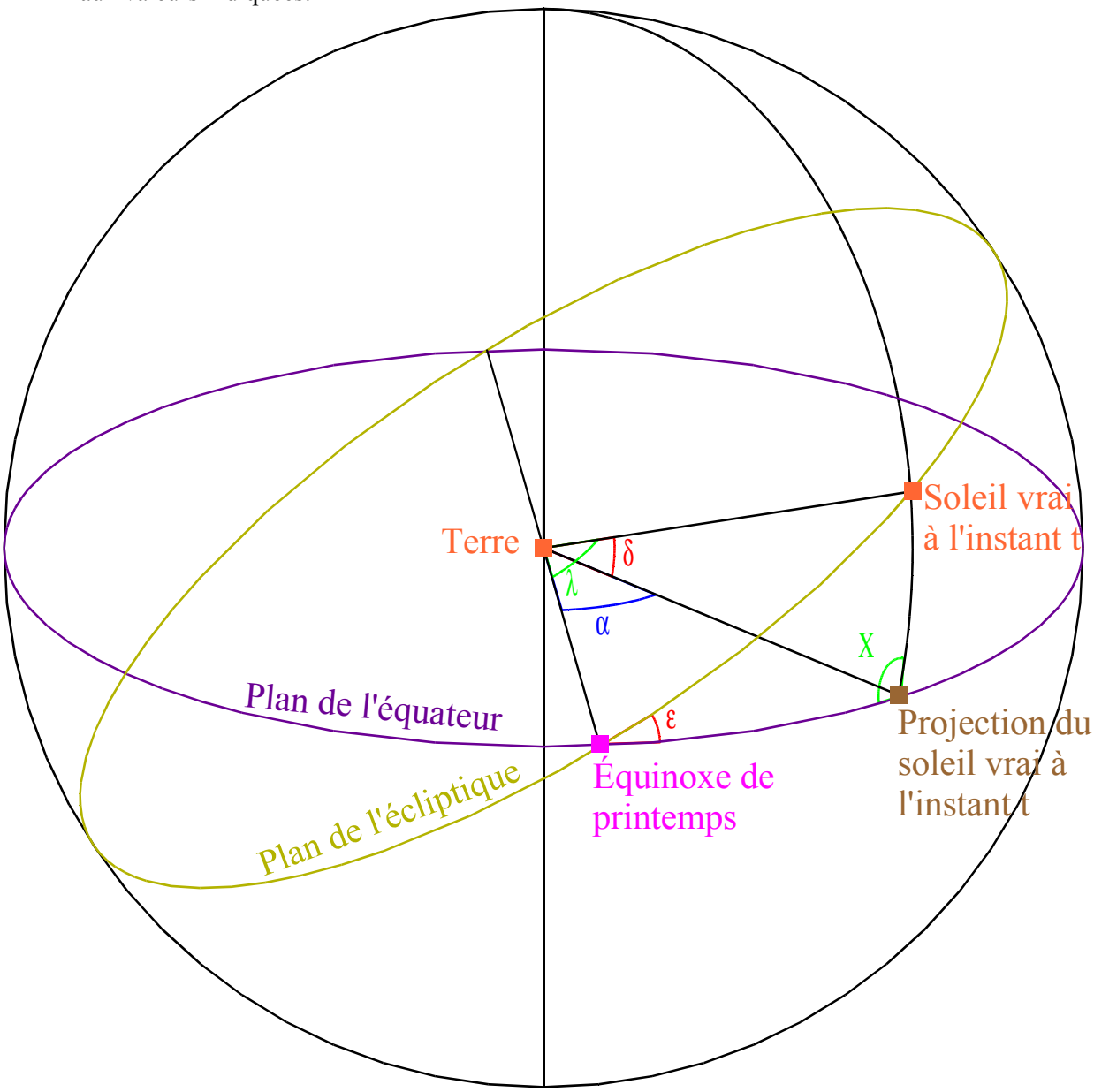


Schéma général

Grâce à l'angle, dont le centre correspond à la terre, entre l'équinoxe de printemps et la projection du soleil vrai, on peut calculer la position angulaire de la projection du soleil vrai. Comme l'origine des angles pour le plan de l'équateur correspond au point où se trouve le soleil moyen à l'origine du temps, la position angulaire de la projection du soleil vrai à l'instant t correspond à l'angle entre le soleil moyen à l'origine du temps et la projection du soleil vrai à l'instant t. Grâce au dessin ci-dessous, on voit que la position angulaire de la projection du soleil vrai, notée Θ, est égale à:

$\Theta = \alpha + \varphi$

- Quand la projection du soleil vrai se trouve entre l'équinoxe de printemps et le soleil moyen à l'origine du temps, $\Theta = \alpha + \varphi - 2\pi$

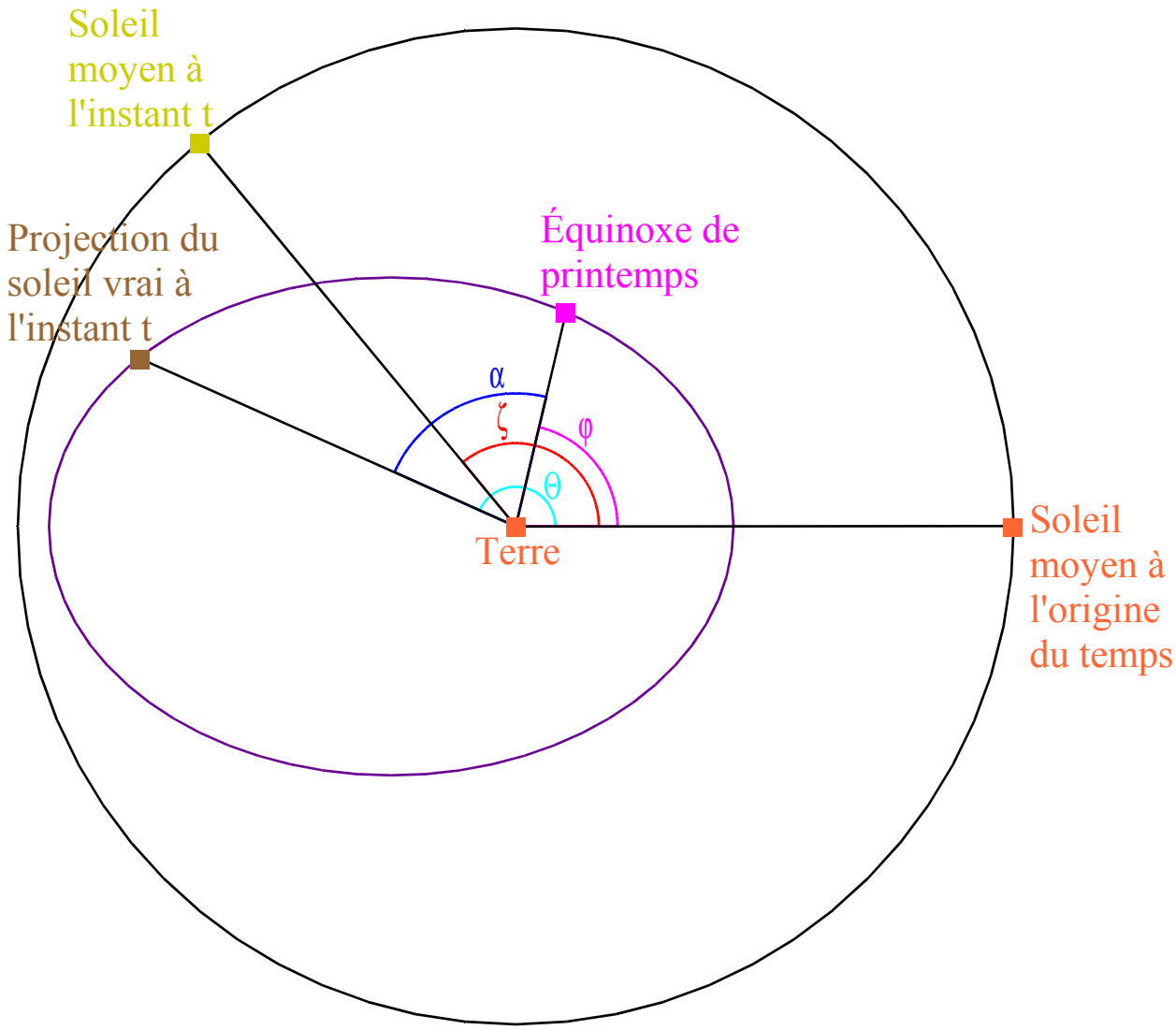


Schéma du plan de l'équateur

Pour pouvoir projeter le soleil vrai sur le plan de l'équateur, on a soustrait l'angle entre le périhélie et l'équinoxe de printemps à la position angulaire du soleil vrai. Maintenant qu'on a fait cette projection, il faut rajouter cet angle pour trouver la position angulaire de la projection du soleil vrai. Mais cet angle se trouvait sur le plan de l'écliptique. Or on travaille maintenant sur le plan de l'équateur. Mais le soleil vrai passe au périhélie à l'origine du temps. Donc, sur le plan de l'équateur, cet angle correspond à l'angle entre le soleil moyen à l'origine du temps et l'équinoxe de printemps, noté φ. Par conséquent, l'angle entre le soleil moyen à l'origine du temps et l'équinoxe de printemps est égal à l'angle entre le périhélie et l'équinoxe de printemps, noté φ. Finalement, cet angle vaut donc 77,06 degrés, c'est-à-dire 1,345 radians.

Finalement la position angulaire de la projection du soleil vrai, notée Θ, est égale à:
$\Theta = \arctan(\tan(f-\varphi)\cos(\varepsilon)) + \varphi$

- La position angulaire du soleil vrai, noté f, à l'instant t ne peut pas être calculée rigoureusement par une formule. Mais on peut obtenir une bonne approximation de cette position angulaire avec l'une des deux méthodes présentées ci-dessus.

Si on utilise la première méthode pour calculer une approximation de la position angulaire du soleil vrai à l'instant t, la position angulaire de la projection du soleil vrai, notée Θ, à l'instant t est égale à:

$$\arctan\left(\tan\left(\omega_\sigma t + 2e\sin(\omega_\sigma t) + \frac{5e^2\sin(2\omega_\sigma t)}{4} + \frac{13e^3\sin(3\omega_\sigma t)}{12} - \varphi\right)\cos(\varepsilon)\right) + \varphi$$

- Attention: cette formule contient l'addition d'un angle avec le sinus de lui-même, par conséquent elle ne fonctionne que si on met tous les angles en radian.

Calcul de l'équation du temps

On connaît maintenant la position angulaire de la projection du soleil vrai, ainsi que la position angulaire du soleil moyen. Ces deux positions angulaires concernent le même plan, car le soleil moyen et la projection du soleil vrai sont toutes les deux dans le plan de l'équateur. De plus ces deux positions angulaires sont exprimées par rapport au même référentiel. On peut donc enfin mettre en rapport la position du soleil vrai avec celle du soleil moyen. Or l'équation du temps est directement en rapport avec l'angle entre la projection du soleil vrai et le soleil moyen. On voit sur le dessin ci-dessus que pour obtenir cet angle, il suffit de soustraire la position angulaire du soleil moyen à la position angulaire de la projection du soleil vrai.
L'angle, dont le centre correspond à la terre, entre la projection du soleil vrai et le soleil moyen est donc égal à:
$\Theta - \zeta$

Cet angle est dans le plan de l'équateur, car le soleil moyen, la projection du soleil vrai, et la terre se trouvent tous dans le plan de l'équateur. Or le style d'un cadran solaire ainsi que la table sur laquelle l'ombre du style est projetée se trouvent, eux aussi, dans le plan de l'équateur. De plus, on néglige la planète terre. Par conséquent, l'angle, dont le centre correspond à la terre, entre la projection du soleil vrai et le soleil moyen, correspond aussi à l'angle, dont le centre correspond au style d'un cadran solaire, entre l'ombre du style engendrée par le soleil vrai, et l'ombre (imaginaire) du style engendrée par le soleil moyen. Or un cadran qui fonctionne avec le soleil vrai indique l'heure solaire, et un cadran imaginaire qui fonctionne avec le soleil moyen indique l'heure légale. Comme l'équation du temps correspond à la différence entre l'heure solaire et l'heure légale, et que la vitesse angulaire de l'ombre du style d'un cadran solaire, notée ω_τ, vaut 0.004166 degrés/seconde (0.00007272 radians/seconde), l'équation du temps est égale à:

$$\frac{\Theta - \zeta}{\omega_\tau}$$

Finalement, l'équation du temps à l'instant t est donc égale à:

$$\frac{\arctan(\tan(f - \varphi)\cos(\varepsilon)) + \varphi - \omega_\sigma t}{\omega_\tau}$$

Si on utilise la première méthode pour calculer une approximation de la position angulaire du soleil vrai à l'instant t, l'équation du temps à l'instant t est à peu près égale à:

$$\frac{\arctan\left(\tan\left(\omega_\sigma t + 2e\sin(\omega_\sigma t) + \frac{5e^2\sin(2\omega_\sigma t)}{4} + \frac{13e^3\sin(3\omega_\sigma t)}{12} - \varphi\right)\cos(\varepsilon)\right) + \varphi - \omega_\sigma t}{\omega_\tau}$$

Pour avoir les valeurs concrètes de l'équation du temps, une feuille de calculs contenant un tableau de l'équation du temps (et de la déclinaison) calculé avec la formule ci-dessus est disponible en annexe.

Voici un extrait de cette feuille de calculs:

			Équation	Équation				
Moment		t	Du temps	Du temps		δ	δ	
Jour	Mois	Seconde	Seconde	Minute	Seconde	Radian	Degré	Minute
10	janvier	604800	450.740748	7	31	-0.382901792	-21	-56
20	janvier	1468800	661.1670573	11	1	-0.350735283	-20	-6
1	février	2505600	815.2636488	13	35	-0.297871762	-17	-4
10	février	3283200	854.4634744	14	14	-0.249801474	-14	-19
20	février	4147200	825.2769114	13	45	-0.189872302	-10	-53
1	mars	4946400	739.943897	12	20	-0.130011821	-7	-27
10	mars	5724000	615.8032973	10	16	-0.069199239	-3	-58
20	mars	6588000	447.4648683	7	27	-0.000335501	0	-1
1	avril	7624800	230.8228059	3	51	0.081654841	4	41
10	avril	8402400	77.24361005	1	17	0.141002523	8	5
20	avril	9266400	-66.71413637	-1	-7	0.203148494	11	38
1	mai	10216800	-175.6187743	-2	-56	0.265017333	15	11
10	mai	10994400	-217.1074794	-3	-37	0.309164571	17	43
20	mai	11858400	-209.3218042	-3	-29	0.349980938	20	3
1	juin	12895200	-130.7002422	-2	-11	0.385740398	22	6
10	juin	13672800	-33.79351959	0	-34	0.40208114	23	2
20	juin	14536800	93.58965459	1	34	0.409048382	23	26
1	juillet	15487200	231.3726438	3	51	0.402872989	23	5
10	juillet	16264800	321.8670203	5	22	0.387262698	22	11
20	juillet	17128800	381.0279194	6	21	0.359424272	20	36
1	août	18165600	378.3107791	6	18	0.31286985	17	56
10	août	18943200	319.5081329	5	20	0.269803011	15	28
20	août	19807200	200.5960884	3	21	0.215171963	12	20
1	septembre	20844000	-2.649233618	0	-3	0.142266183	8	9
10	septembre	21621600	-184.0182896	-3	-4	0.083839888	4	48
20	septembre	22485600	-397.0063972	-6	-37	0.016701188	0	57
1	octobre	23436000	-622.3519543	-10	-22	-0.057986949	-3	-19
10	octobre	24213600	-781.437829	-13	-1	-0.118240442	-6	-46
20	octobre	25077600	-912.8363092	-15	-13	-0.182617002	-10	-28
1	novembre	26114400	-984.0818647	-16	-24	-0.253763426	-14	-32
10	novembre	26892000	-963.2870547	-16	-3	-0.300864477	-17	-14
20	novembre	27756000	-860.1922532	-14	-20	-0.344992904	-19	-46
1	décembre	28706400	-654.7770263	-10	-55	-0.381431277	-21	-51
10	décembre	29484000	-428.7218892	-7	-9	-0.400398476	-22	-56
20	décembre	30348000	-140.5253588	-2	-21	-0.408971284	-23	-26
1	janvier	31384800	212.704677	3	33	-0.401281389	-22	-60

Conception d'un cadran solaire armillaire qui donne directement l'heure légale

J'ai écrit plus haut qu'un cadran solaire ne peut indiquer que l'heure solaire, et que c'est à l'utilisateur du cadran de rajouter l'équation du temps pour trouver l'heure légale. Cependant il est possible de construire un cadran solaire spécial qui corrige par lui-même l'équation du temps sans que l'utilisateur n'intervienne. Pour cela, on peut procéder de la même manière que lorsqu'on a créé un cadran solaire qui corrigeait directement le facteur de correction du fuseau horaire. Dans ce cas, la distance entre la ligne horaire de référence et la ligne horaire qui indique midi est égale à :
rayon$\cdot\omega_{\tau}\cdot$(facteur de correction du fuseau horaire+équation du temps)

Finalement, la distance entre la ligne horaire de référence et la ligne horaire qui indique midi est donc égale à :

$$\text{rayon}\left(\lambda + N\,3600\,\omega_{\tau} + \left(\arctan\left(\tan\left(\omega_{\sigma}t + 2e\sin(\omega_{\sigma}t) + \frac{5e^2\sin(2\omega_{\sigma}t)}{4} + \frac{13e^3\sin(3\omega_{\sigma}t)}{12} - \varphi\right)\cos(\varepsilon)\right) + \varphi - \omega_{\sigma}t\right)\right)$$

Mais cette formule est inutilisable, car elle contient le paramètre t. Cela signifie que, pour un cadran qui prend en compte l'équation du temps, la distance entre la ligne horaire de référence et la ligne horaire qui indique midi varie continuellement au cours de l'année. En effet, cette distance dépend directement de l'équation du temps; or l'équation du temps varie continuellement au cours de l'année. Il faudrait donc, non seulement, construire un cadran solaire avec une échelle coulissante; mais il faudrait aussi que, à chaque utilisation, l'utilisateur du cadran règle l'échelle par rapport à l'équation du temps. Or cela n'a aucun sens, car il est beaucoup plus simple et plus précis de lire l'heure sur un cadran classique, et de rajouter l'équation du temps. On ne peut donc pas procéder de la même manière pour concevoir un cadran qui corrige l'équation du temps que pour concevoir un cadran qui corrige le facteur de correction du fuseau horaire. En effet, le facteur de correction du fuseau horaire reste toujours constant; mais ce n'est pas le cas de l'équation du temps.

Cependant, il y a une astuce qui permet de contourner ce problème; et de concevoir, malgré tout, un cadran qui corrige par lui-même l'équation du temps, et qui indique directement l'heure de la montre. La formule ci-dessus n'est donc pas perdue; elle sera quand même utilisée plus loin. Cette astuce se base sur la hauteur du soleil vrai au-dessus (ou au-dessous) du plan de l'équateur. En effet, la trajectoire du soleil vrai se trouve dans le plan de l'écliptique, et le plan de l'écliptique est penché par rapport au plan de l'équateur. Par conséquent, la plupart du temps, le soleil vrai ne se trouve pas dans le plan de l'équateur. Concrètement, la hauteur du soleil vrai au-dessus (ou au-dessous) du plan de l'équateur prend la forme d'un angle. Comme on le voit sur l'image ci-dessous, il s'agit de l'angle, dont le centre correspond à la terre, entre le soleil vrai et la projection du soleil vrai. Cet angle s'appelle la déclinaison du soleil. La déclinaison du soleil se note δ. Comme le soleil vrai met une année pour faire un tour complet autour de la terre, la déclinaison du soleil se répète tel quel d'une année à l'autre. Or il en est de même pour l'équation du temps. Comme pour l'équation du temps, on peut donc faire un tableau qui donne la déclinaison pour chaque jour de l'année. On voit donc qu'il y a une similitude entre l'équation du temps et la déclinaison du soleil vrai. Or c'est justement cette similitude qu'on utilise pour concevoir un cadran solaire qui corrige par lui-même l'équation du temps. La déclinaison du soleil vrai est mesurable avec un cadran solaire. En connaissant la déclinaison, on peut connaître le moment de l'année. Finalement, en connaissant le moment de l'année, on peut connaître l'équation du temps. C'est sur ce principe que se base un cadran solaire qui corrige par lui-même l'équation du temps. Mais tout d'abord, il faut calculer la déclinaison du soleil vrai.

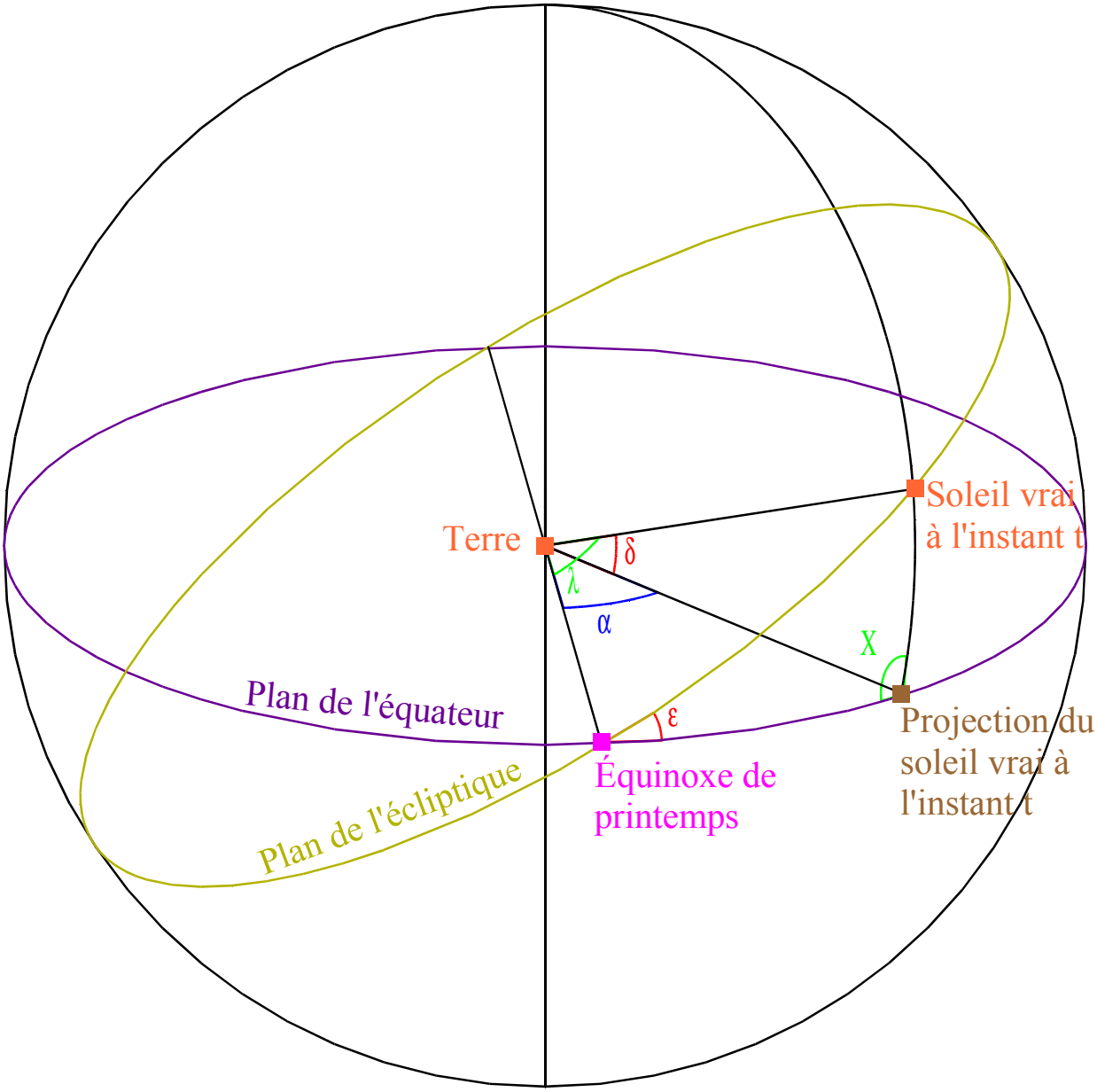


Schéma général

Calcul de la déclinaison du soleil vrai

Pour calculer la déclinaison du soleil vrai, notée δ, il faut utiliser la première relation principale de la trigonométrie sphérique :

$$\cos(\alpha)\cos(\delta) + \sin(\alpha)\sin(\delta)\cos(X) = \cos(\lambda)$$

La projection angulaire du soleil vrai sur le plan de l'équateur est orthogonale, c'est-à-dire que le soleil vrai est projeter perpendiculairement au plan de l'équateur. Par conséquent, l'angle X vaut 90 degrés. Cela implique que l'équation ci-dessus se simplifie, car cos(90) = 0 :

$$\cos(\alpha)\cos(\delta) = \cos(\lambda)$$

Grâce à cette équation, on calcule d'abord le cosinus de l'angle α :

$$\cos(\alpha)\cos(\delta) = \cos(\lambda) \Rightarrow$$
$$\cos(\alpha) = \frac{\cos(\lambda)}{\cos(\delta)}$$

Puis on calcule ensuite le sinus au carré de l'angle α :

$$\cos(\alpha)\cos(\delta) = \cos(\lambda) \Rightarrow$$
$$\cos(\alpha) = \frac{\cos(\lambda)}{\cos(\delta)} \Rightarrow$$
$$\cos^2(\alpha) = \frac{\cos^2(\lambda)}{\cos^2(\delta)} \Rightarrow$$
$$1 - \sin^2(\alpha) = \frac{\cos^2(\lambda)}{\cos^2(\delta)} \Rightarrow$$
$$\sin^2(\alpha) = 1 - \frac{\cos^2(\lambda)}{\cos^2(\delta)} \Rightarrow$$
$$\sin^2(\alpha) = \frac{\cos^2(\delta) - \cos^2(\lambda)}{\cos^2(\delta)}$$

Il faut maintenant utiliser la deuxième relation principale de la trigonométrie sphérique :

$$\cos(\lambda)\cos(\alpha) + \sin(\lambda)\sin(\alpha)\cos(\varepsilon) = \cos(\delta)$$

Comme l'angle α ne nous intéresse pas, on remplace le cosinus de l'angle α et le sinus au carré de l'angle α par les valeurs calculées ci-dessus :

$$\cos(\lambda)\cos(\alpha) + \sin(\lambda)\sin(\alpha)\cos(\varepsilon) = \cos(\delta) \Rightarrow$$
$$\frac{\cos^2(\lambda)}{\cos(\delta)} + \sin(\lambda)\sin(\alpha)\cos(\varepsilon) = \cos(\delta) \Rightarrow$$
$$\sin(\lambda)\sin(\alpha)\cos(\varepsilon) = \cos(\delta) - \frac{\cos^2(\lambda)}{\cos(\delta)} \Rightarrow$$
$$\sin(\lambda)\sin(\alpha)\mathrm{Cos}(\varepsilon) = \frac{\cos^2(\delta) - \cos^2(\lambda)}{\cos(\delta)} \Rightarrow$$
$$\sin^2(\lambda)\sin^2(\alpha)\cos^2(\varepsilon) = \frac{(\cos^2(\delta) - \cos^2(\lambda))^2}{\cos^2(\delta)} \Rightarrow$$
$$\frac{\sin^2(\lambda)(\cos^2(\delta) - \cos^2(\lambda))\cos^2(\varepsilon)}{\cos^2(\delta)} = \frac{(\cos^2(\delta) - \cos^2(\lambda))^2}{\cos^2(\delta)}$$

Cette équation contient seulement les angles qui nous sont utiles. On peut donc exprimer δ en fonction de ε et de λ :

$$\frac{\sin^2(\lambda)(\cos^2(\delta)-\cos^2(\lambda))\cos^2(\varepsilon)}{\cos^2(\delta)} = \frac{(\cos^2(\delta)-\cos^2(\lambda))^2}{\cos^2(\delta)} \Rightarrow$$

$$\sin^2(\lambda)\cos^2(\varepsilon) = \cos^2(\delta)-\cos^2(\lambda) \Rightarrow$$

$$\sin^2(\lambda)\cos^2(\varepsilon) + \cos^2(\lambda) = \cos^2(\delta) \Rightarrow$$

$$\sin^2(\lambda)\cos^2(\varepsilon) + 1 - \sin^2(\lambda) = 1 - \sin^2(\delta) \Rightarrow$$

$$\sin^2(\lambda) - \sin^2(\lambda)\cos^2(\varepsilon) = \sin^2(\delta) \Rightarrow$$

$$\sin^2(\lambda) - \sin^2(\lambda)(1-\sin^2(\varepsilon)) = \sin^2(\delta) \Rightarrow$$

$$\sin^2(\lambda) - \sin^2(\lambda) + \mathrm{Sin}^2(\lambda)\mathrm{Sin}^2(\varepsilon) = \mathrm{Sin}^2(\delta) \Rightarrow$$

$$\sin^2(\lambda)\mathrm{Sin}^2(\varepsilon) = \mathrm{Sin}^2(\delta) \Rightarrow$$

$$\sin(\lambda)\sin(\varepsilon) = \sin(\delta) \Rightarrow$$

$$\delta = \arcsin(\sin(\lambda)\sin(\varepsilon))$$

L'angle entre l'équinoxe de printemps et le soleil vrai, noté λ, a été calculé dans le paragraphe Équation du temps -> Projection du soleil vrai sur le plan de l'équateur. Cette angle est égal à :

$$f - \varphi$$

La position angulaire du soleil vrai, noté f, à l'instant t ne peut pas être calculée rigoureusement par une formule. Mais on peut obtenir une bonne approximation de cette position angulaire avec l'une des deux méthodes présentées au paragraphe Équation du temps -> Calcul de la position angulaire du soleil vrai à un moment donné.

Par conséquent, la déclinaison du soleil, notée δ, est égal à :

$$\arcsin(\sin(f-\varphi)\sin(\varepsilon))$$

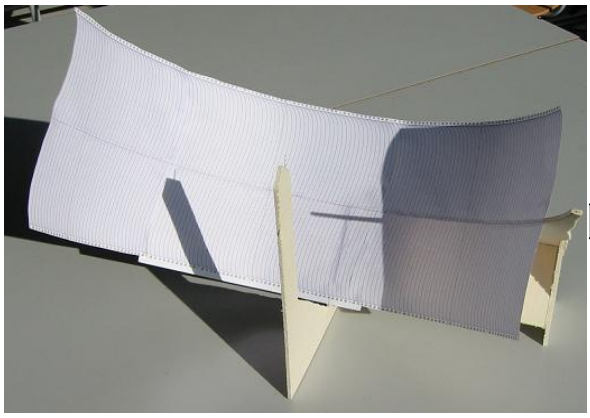
Si on utilise la première méthode pour calculer une approximation de la position angulaire du soleil vrai à l'instant t, la déclinaison du soleil, notée δ, à l'instant t est égale à:

$$\arcsin\left(\sin\left(\omega_\sigma t + 2e\sin(\omega_\sigma t) + \frac{5e^2\sin(2\omega_\sigma t)}{4} + \frac{13e^3\sin(3\omega_\sigma t)}{12} - \varphi\right)\sin(\varepsilon)\right)$$

Conception du cadran

Sur un cadran solaire classique, on mesure la position de l'ombre du style par rapport aux lignes horaires. Or les lignes horaires correspondent aux graduations d'un axe. C'est axe s'appelle l'axe x. Par conséquent, un cadran solaire classique mesure uniquement la position du soleil moyen par rapport à l'axe x. En effet, pour construire un cadran solaire classique, on ne s'occupe que du soleil moyen. Or le soleil moyen reste toujours dans le plan de l'équateur, et l'axe x est parallèle au plan de l'équateur. Par conséquent l'ombre du style engendrée par le soleil moyen ne se déplace que parallèlement à l'axe x.

Sur un cadran qui prend en compte l'équation du temps, on mesure la position de l'ombre du style par rapport à deux dimensions, c'est-à-dire selon deux coordonnées. En effet un cadran qui prend en compte l'équation du temps mesure deux choses. Premièrement, comme un cadran classique, il mesure la position du soleil moyen par rapport à l'axe x. Mais, deuxièmement, il mesure aussi la déclinaison du soleil vrai. Pour cela, il faut rajouter un deuxième axe qui permet de mesurer la déclinaison du soleil vrai. Ce deuxième axe s'appelle l'axe y. Mais pour pouvoir faire cela, il faut apporter deux modifications majeures au cadran solaire. Premièrement, la table est un arc de cercle, et il n'est pas possible de tracer deux axes non parallèles sur un arc de cercle. Il faut donc remplacer cet arc de cercle par un arc de cylindre. La table d'un cadran qui prend en compte l'équation du temps est donc un arc de cylindre. Comme ce cadran comporte deux axes, on mesure donc la position de l'ombre du style selon deux dimensions. Deuxièmement, l'ombre du style est une ligne. En effet, le style est un bâton, et l'ombre d'un bâton est une ligne. Or on ne peut pas mesurer la position d'une ligne selon deux dimensions. Il faut donc remplacer le bâton par une sphère, un cube, une pointe, ou l'extrémité d'un objet anguleux. Sur un cadran solaire qui prend en compte l'équation du temps, l'ombre du style n'est donc plus une ligne, mais un point.



Cadran solaire qui prend en compte l'équation du temps

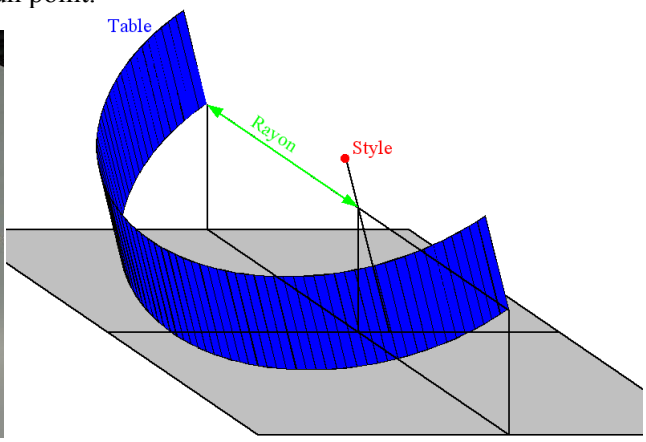


Schéma d'un cadran solaire qui prend en compte l'équation du temps

Construction du cadran

La construction d'un cadran solaire qui prend en compte le système des fuseaux horaires est quasiment la même que celle d'un cadran armillaire classique. La principale différence c'est que la table est un arc de cylindre et non un arc de cercle. De plus, le bâton qui faisait office de style sur un cadran solaire classique est toujours là à la même place, mais maintenant, ce n'est plus lui qui fait office de style. Cependant, ce bâton doit être plus court qu'avant. En effet, il faut qu'il se termine exactement au milieux de l'arc de cylindre. Par conséquent, sa longueur (sans compter la partie sous terre) doit être égale à:

$$\cot an(\phi) \cdot rayon + \frac{\text{hauteur de la table}}{2}$$

- La latitude de l'endroit où on se trouve est notée ϕ.

Une fois que le bâton est de bonne longueur, il faut placer une sphère, un cube, une pointe, ou l'extrémité d'un objet anguleux au bout du bâton. L'objet qu'on place au bout du bâton correspond au style.

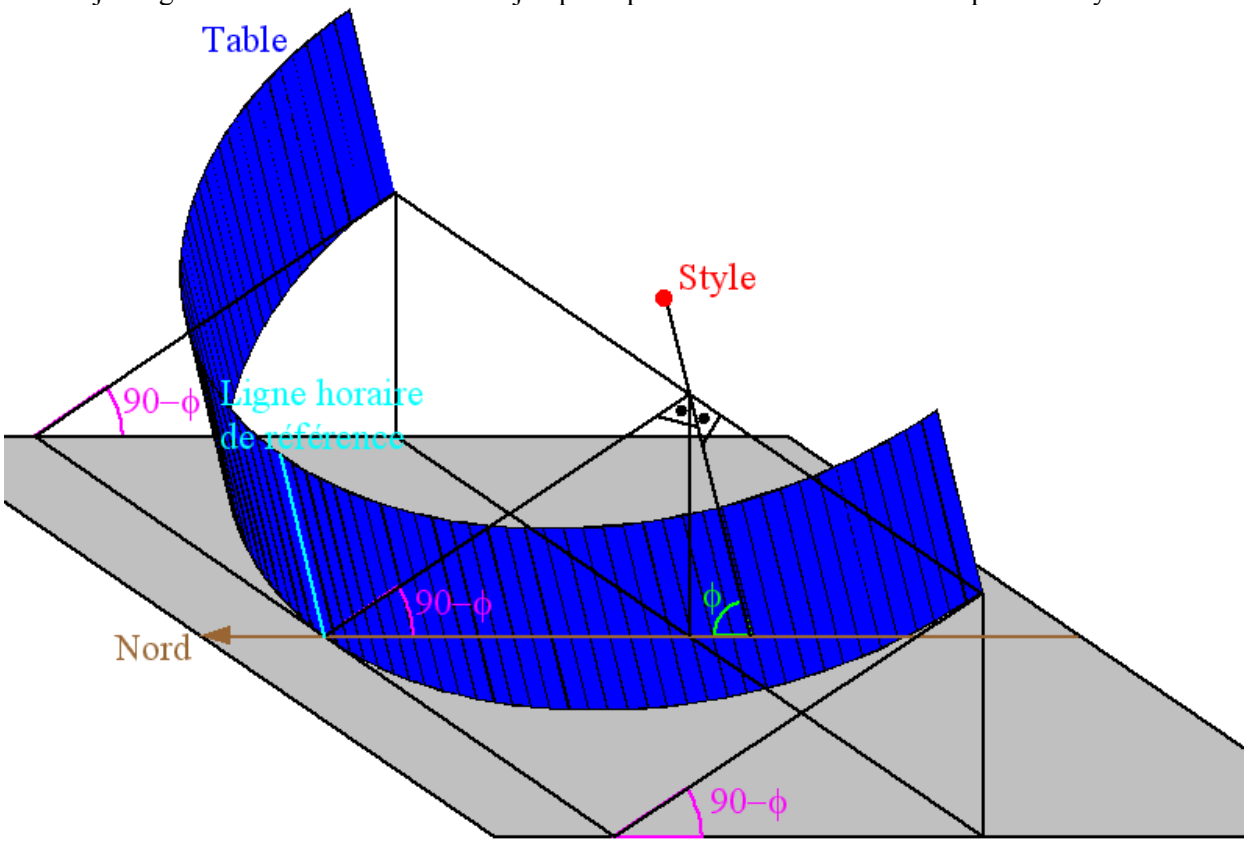


Schéma pour la construction d'un cadran solaire qui prend en compte l'équation du temps

Traçage de l'axe y

La déclinaison du soleil vrai correspond à l'angle, dont le centre correspond à la terre, entre le soleil vrai et la projection du soleil vrai sur le plan de l'équateur. Or la projection du soleil vrai sur le plan de l'équateur est orthogonale au plan de l'équateur. Par conséquent la déclinaison du soleil vrai est un angle qui est toujours parfaitement perpendiculaire au plan de l'équateur. Par conséquent, sur le cadran solaire, l'axe qui permet de mesurer la déclinaison du soleil vrai, c'est-à-dire l'axe y, est perpendiculaire au plan de l'équateur. Or l'axe x est parallèle au plan de l'équateur. Par conséquent, l'axe y est perpendiculaire à l'axe x. On obtient donc un système d'axe orthonormé. Pour simplifier, on place l'origine de ce système d'axe au milieu de la ligne horaire de référence. Cette origine se trouve donc dans le plan qui passe par le style et qui est parallèle au plan de l'équateur.

Mesure de la déclinaison du soleil vrai

La déclinaison du soleil vrai correspond à l'angle, dont le centre correspond à la terre, entre le soleil vrai et la projection du soleil vrai. Comme le rayon de la terre est totalement négligé, on considère que le centre de la terre est confondu avec le style du cadran, et que l'axe x et le style se trouvent tous les deux dans le plan de l'équateur. Dans ce cas, la déclinaison du soleil vrai correspond à l'angle, dont le centre correspond au style du cadran, entre le soleil vrai et la projection du soleil vrai, ou encore à l'angle, dont le centre correspond au style du cadran, entre l'ombre du style engendrée par le soleil vrai et l'ombre du style engendrée par la projection du soleil vrai. De plus, la projection du soleil vrai se trouve par définition dans le plan de l'équateur. Par conséquent, l'ombre engendrée par la projection du soleil vrai se trouve elle-aussi dans le plan de l'équateur, c'est-à-dire sur l'axe x. Cela implique que le segment reliant le style et l'ombre engendrée par la projection du soleil vrai se trouve dans le plan de l'équateur. Ce segment est donc orthogonal à la table du cadran. Finalement, comme on voit sur le dessin ci-dessous, la tangente de la déclinaison du soleil vrai est égale à:

$$-\frac{\text{longueur du segment reliant l'ombre engendrée par le soleil vrai à l'ombre engendrée par la projection du soleil vrai}}{\text{rayon}}$$

La déclinaison du soleil vrai dépend donc de la distance entre l'ombre engendrée par le soleil vrai à l'ombre engendrée par la projection du soleil vrai. Premièrement, l'ombre engendrée par la projection du soleil vrai se trouve dans le plan de l'équateur, c'est-à-dire sur l'axe x. Deuxièmement, la projection du soleil vrai sur le plan de l'équateur est orthogonale au plan de l'équateur. Par conséquent, le segment reliant l'ombre engendrée par le soleil vrai à l'ombre engendrée par la projection du soleil vrai est perpendiculaire à l'équateur, c'est-à-dire parallèle à l'axe y. Cela implique que la distance entre l'ombre engendrée par le soleil vrai et l'ombre engendrée par la projection du soleil vrai est égale à la coordonnée y de l'ombre engendrée par le soleil vrai. On peut donc calculer la déclinaison du soleil vrai:

$$\tan(\delta) = -\frac{y}{\text{rayon}} \Rightarrow$$

$$\delta = -\arctan\left(\frac{y}{\text{rayon}}\right)$$

On voit donc que la déclinaison du soleil vrai est en rapport uniquement avec la coordonnée y de l'ombre du style. En effet, la coordonnée x n'intervient pas. Cela est tout à fait normal, car la déclinaison du soleil vrai correspond à un angle orthogonal au plan de l'équateur alors que l'axe x est parallèle au plan de l'équateur.

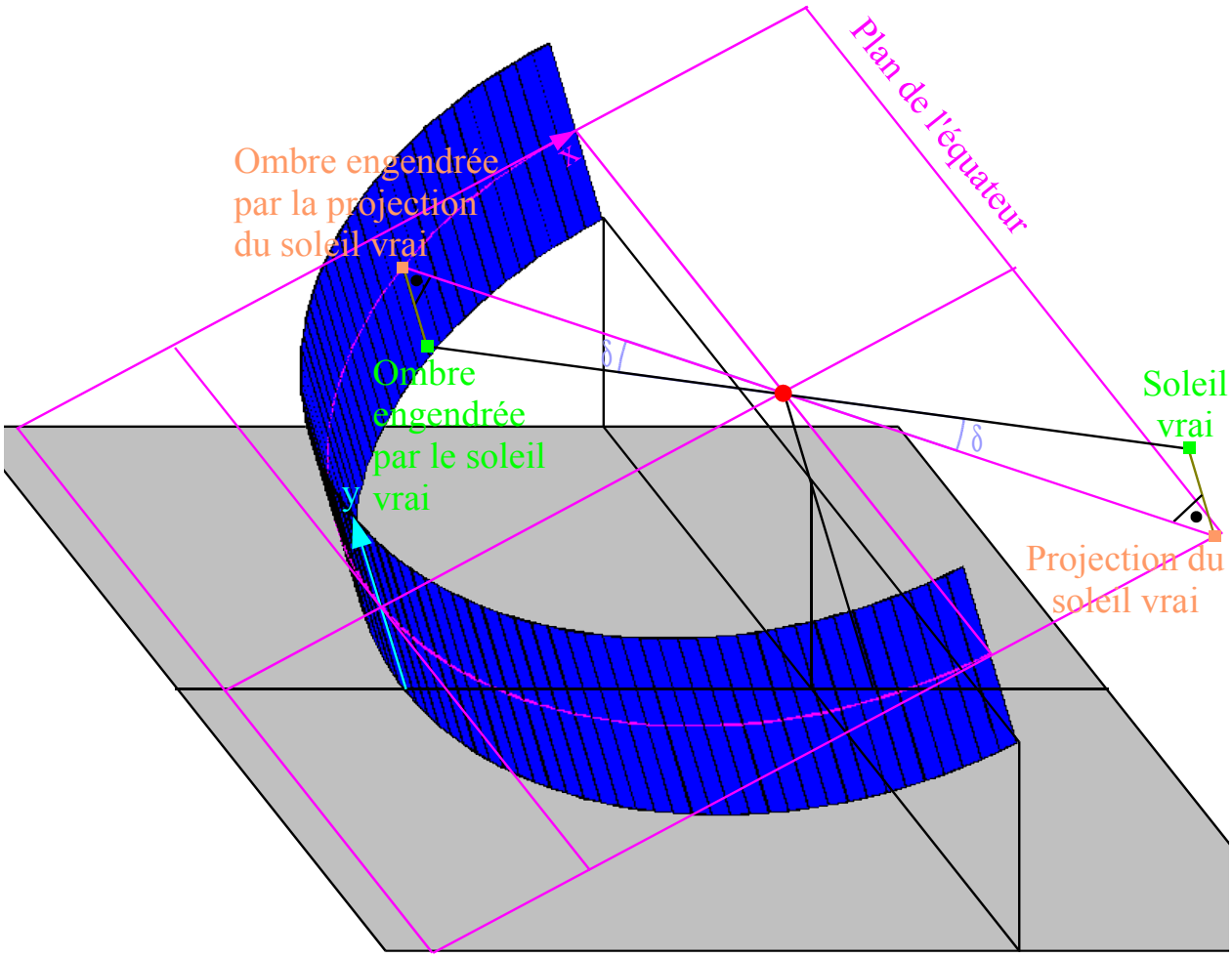


Schéma du fonctionnement d'un cadran solaire qui prend en compte l'équation du temps

Fonctionnement du cadran

Dans l'état actuel, ce cadran indique toujours l'heure solaire, et non l'heure légale. Pour utiliser ce cadran, il faut d'abord lire l'heure en regardant la position de l'ombre du style par rapport aux lignes horaires, exactement comme sur un cadran classique. L'heure obtenue correspond à l'heure solaire. Pour obtenir l'heure légale, il faut encore mesurer la coordonnée y de l'ombre du style, c'est-à-dire la distance, parallèlement à l'axe y, entre l'axe x et l'ombre du style. Ensuite, grâce à la coordonnée y de l'ombre du style, on calcule la déclinaison du soleil vrai. Une fois qu'on connaît la déclinaison du soleil vrai, on cherche, dans le tableau des déclinaisons, à quelle date correspond la déclinaison qu'on a calculé. Une fois qu'on connaît la date, on cherche, dans le tableau de l'équation du temps, la valeur de l'équation du temps qui correspond à cette date. Finalement, on rajoute l'équation du temps à l'heure qui est indiquée par le cadran, et on obtient l'heure légale. Tout ce procédé est bien compliqué; ce cadran a-t-il vraiment un avantage sur un cadran solaire classique? Oui, cet avantage correspond au fait que l'utilisateur de ce cadran solaire spécial n'a pas besoin de connaître la date, pour trouver l'heure légale. Avec un cadran solaire classique, l'utilisateur doit nécessairement connaître la date, pour pouvoir trouver la valeur de l'équation du temps. Or avec ce cadran solaire spécial, c'est le cadran solaire lui-même qui indique la date à l'utilisateur. À première vue, cet avantage ressemble plus à un inconvénient qu'à un avantage. En effet, premièrement tout le monde connaît la date, et deuxièmement le processus qui permet de mesurer la date avec le cadran est imprécis et ennuyant. Mais il y a une astuce qui permet de faire accomplir ce processus par le cadran solaire lui-même et de lire directement l'heure légale sur le cadran. Cette astuce consiste à déformer les lignes horaires de façon à ce que la distance, parallèlement à l'axe x, entre la ligne horaire non déformée et la ligne horaire déformée corresponde à l'équation du temps. De cette façon l'équation du temps est directement corrigée par le cadran sous forme de distance. Pour commencer, on considère uniquement la ligne horaire qui indique midi. Je rappelle que pour tracer la ligne horaire qui indique midi non déformée, on s'occupe du soleil moyen et on ne prend pas en compte l'équation du temps. La ligne horaire qui indique midi non déformée est donc une

droite parallèle à la ligne horaire de référence, et la distance entre ces deux droites est égale à:
$\text{rayon}\cdot(\lambda+(\omega_\tau\cdot N\cdot 3600))$

Pour tracer la ligne horaire qui indique midi déformée, il faut d'abord calculer, en tenant compte de l'équation du temps, la distance, parallèlement à l'axe x, entre la ligne horaire qui indique midi et la ligne horaire de référence. Or, cette distance, j'en ai déjà parlé, et je l'ai même déjà calculée au début de ce chapitre. Cette distance est égale à:

$$\text{rayon}\left(\lambda + N\,3600\,\omega_\tau + \left(\arctan\left(\tan\left(\omega_\sigma t + 2e\sin(\omega_\sigma t) + \frac{5e^2\sin(2\omega_\sigma t)}{4} + \frac{13e^3\sin(3\omega_\sigma t)}{12} - \varphi\right)\cos(\varepsilon)\right) + \varphi - \omega_\sigma t\right)\right)$$

Cette formule n'est toujours pas utilisable, car elle contient le paramètre t. Le paramètre t peut prendre une infinité de valeurs. Par conséquent, la distance, parallèlement à l'axe x, entre la ligne horaire de référence et la ligne horaire qui indique midi peut prendre une infinité de valeur. Pour pouvoir utiliser cette formule, il faut donc abandonner l'idée que la ligne horaire qui indique midi est une ligne droite et verticale. À partir de maintenant, la ligne horaire qui indique midi est une courbe. Mais la ligne horaire de référence reste inchangée. La formule ci-dessus donne donc la distance, parallèlement à l'axe x, entre une droite et une courbe. Or il y a une infinité de distance entre une droite et une courbe. Il est donc tout à fait normal que la distance, parallèlement à l'axe x, entre la ligne horaire de référence et la ligne horaire qui indique midi prenne une infinité de valeur. De plus, la ligne horaire de référence est confondue avec l'axe y. Elle passe donc par l'origine. Or cette distance se mesure parallèlement à l'axe x. Par conséquent, cette distance est égale à la coordonnée x de l'un des points qui forme la ligne horaire qui indique midi. On connaît donc maintenant la coordonnée x des points qui forment la ligne horaire qui indique midi, en fonction de l'instant t:

$$x = -\,\text{rayon}\left(\lambda + N\,3600\,\omega_\tau + \left(\arctan\left(\tan\left(\omega_\sigma t + 2e\sin(\omega_\sigma t) + \frac{5e^2\sin(2\omega_\sigma t)}{4} + \frac{13e^3\sin(3\omega_\sigma t)}{12} - \varphi\right)\cos(\varepsilon)\right) + \varphi - \omega_\sigma t\right)\right)$$

Mais pour pouvoir dessiner la ligne horaire qui indique midi, il faut encore calculer la coordonnée y des points qui la forment, en fonction de l'instant t. Pour cela on utilise la déclinaison du soleil vrai. J'ai calculé dans le paragraphe Calcul de la déclinaison du soleil vrai que la déclinaison du soleil vrai est égale à:

$$\arcsin\left(\sin\left(\omega_\sigma t + 2e\sin(\omega_\sigma t) + \frac{5e^2\sin(2\omega_\sigma t)}{4} + \frac{13e^3\sin(3\omega_\sigma t)}{12} - \varphi\right)\sin(\varepsilon)\right)$$

Sur le cadran solaire, la déclinaison du soleil vrai est égale à:

$$-\arctan\left(\frac{y}{\text{rayon}}\right)$$

On peut donc mettre ces deux égalités en équation:

$$-\arctan\left(\frac{y}{\text{rayon}}\right)=\arcsin\left(\sin\left(\omega_\sigma t+2e\sin(\omega_\sigma t)+\frac{5e^2\sin(2\omega_\sigma t)}{4}+\frac{13e^3\sin(3\omega_\sigma t)}{12}-\varphi\right)\sin(\varepsilon)\right)$$

Cette équation contient la coordonnée y de l'ombre du style. On peut donc isoler ce paramètre:

$$y=-\tan\left(\arcsin\left(\sin\left(\omega_\sigma t+2e\sin(\omega_\sigma t)+\frac{5e^2\sin(2\omega_\sigma t)}{4}+\frac{13e^3\sin(3\omega_\sigma t)}{12}-\varphi\right)\sin(\varepsilon)\right)\right)\text{rayon}$$

On connaît donc maintenant la coordonnée y de l'ombre du style, à l'instant t. Lorsque l'ombre du style se trouve sur la ligne horaire qui indique midi, l'un des points qui forme cette ligne horaire est confondu avec l'ombre du style. Par conséquent, la coordonnée y de ce point est égale à celle de l'ombre du style. De cette façon on connaît les deux coordonnées du point, et on peut le dessiner. Mais comment savoir lequel des points qui forment la ligne horaire qui indique midi est confondu avec l'ombre du style? Pour savoir cela, il suffit de considérer l'instant t. En effet, comme l'ombre du style coupe la ligne horaire qui indique midi à un moment bien précis, la valeur de l'instant t doit être le même dans la formule qui donne la coordonnée y de l'ombre du style que dans la formule qui donne la coordonnée x de l'un des points qui forme la ligne horaire qui indique midi. Pour calculer les coordonnées de l'un des points qui forme la ligne horaire qui indique midi, il suffit donc de choisir une valeur pour l'instant t, de calculer la coordonnée x du point à l'instant t qu'on a choisit, puis de calculer la coordonnée y de l'ombre du style à l'instant t qu'on a choisi, la coordonnée y du point est tout simplement égale à la coordonnée y de l'ombre du style. On peut donc tracer ce point. Pour tracer le point suivant, il suffit de choisir une autre valeur pour l'instant t, et de répéter le processus en remplaçant l'instant t par sa nouvelle valeur, puis pour le point suivant, on choisit encore une nouvelle valeur pour l'instant t, et ainsi de suite… Une fois qu'on a tracé un grand nombre de point, il suffit de les relier entre eux. On obtient donc la ligne horaire qui indique midi.

À première vue, cette méthode ne fonctionne que quand l'ombre du style coupe la ligne horaire qui indique midi. Par définition, l'ombre du style coupe cette ligne horaire à midi de l'heure légale. À première vue, on est donc obliger de choisir des instants t qui correspondent à midi. Pour tracer une belle ligne horaire, on peut donc choisir le midi de chaque jour de l'année comme instant t. Dans ce cas, la ligne horaire est formée de 365 points. Mais en réalité, cette méthode fonctionne aussi quand l'ombre du style n'est pas en train de couper la ligne horaire qui indique midi. En effet, les formules utilisées dans cette méthode ne font intervenir que le moment de l'année. Ni la formule qui donne la coordonnée x de l'un des points de la ligne horaire qui indique midi, ni la formule qui donne la coordonnée y de l'ombre du style ne font intervenir le moment de la journée. Finalement, on peut choisir sans autre des valeurs qui ne correspondent pas à midi pour l'instant t.

En ce qui concerne les autres lignes horaires, elles sont toutes pareilles à la ligne horaire qui indique midi. En effet, la méthode utilisée pour tracer la ligne horaire qui indique midi ne fait intervenir que le moment de l'année. Pour tracer les autres lignes horaires, il suffit donc de déplacer, parallèlement à l'axe x, la ligne horaire qui indique midi. La formule qui donne la distance entre les lignes horaires est toujours la même que sur un cadran solaire classique. La distance entre les lignes horaires, parallèlement à l'axe x, est donc égale à:
rayon$\cdot\omega_\tau\cdot$intervalle de temps entre les lignes horaires

Traçage des lignes horaires

Concrètement, le traçage des lignes horaires est trop complexe pour pouvoir être fait directement sur le cadran. En effet, il faut d'abord tracer les lignes horaires sur une feuille plane de papier, de carton, ou de plastique, puis il faut coller cette feuille sur la table du cadran en la courbant selon les dimensions du cadran.

Pour commencer, il faut faire en sorte que l'ombre du style ne se trouve jamais en dehors de la table. Il faut donc calculer les dimensions minimales de la feuille plane. La hauteur de la feuille correspond à la longueur de l'axe y. Or l'axe y est en rapport avec la déclinaison du soleil vrai. Sur le cadran solaire, la déclinaison du soleil vrai est égale à:

$$-\arctan\left(\frac{y}{\text{rayon}}\right)$$

De plus, on sait que la déclinaison du soleil vrai est égale au maximum à l'angle entre le plan de l'écliptique et le plan de l'équateur, noté ε. Par conséquent, la coordonnée y de l'ombre du style est égale au maximum à:

$$\pm \tan(\varepsilon)\,\text{rayon}$$

Finalement, la hauteur de la feuille doit être au moins égale à:

$$2\tan(\varepsilon)\,\text{rayon}$$

En ce qui concerne la longueur de la feuille, la formule qui donne la longueur de la feuille est toujours la même que pour un cadran classique. La longueur de la feuille est donc égale à:

$$\pi\,\text{rayon}$$

Une fois qu'on a une feuille plane aux bonnes dimensions, il faut tracer l'axe x horizontalement au milieu de la feuille, et l'axe y verticalement au milieux de la feuille. L'origine du système d'axe doit être au milieu de la feuille, et les deux axes doivent être exactement perpendiculaires entre eux. Puis on trace la ligne horaire qui indique midi. Pour cela, il faut tracer au moins une trentaine de points. Les coordonnées de ces points sont égales à:

$$x = -\,\text{rayon}\left(\lambda + N\,3600\,\omega_\tau + \left(\arctan\left(\tan\left(\omega_\sigma t + 2e\sin(\omega_\sigma t) + \frac{5e^2\sin(2\omega_\sigma t)}{4} + \frac{13e^3\sin(3\omega_\sigma t)}{12} - \varphi\right)\cos(\varepsilon)\right) + \varphi - \omega_\sigma t\right)\right)$$

$$y = -\tan\left(\arcsin\left(\sin\left(\omega_\sigma t + 2e\sin(\omega_\sigma t) + \frac{5e^2\sin(2\omega_\sigma t)}{4} + \frac{13e^3\sin(3\omega_\sigma t)}{12} - \varphi\right)\sin(\varepsilon)\right)\right)\text{rayon}$$

Les coordonnées de ces points sont données en fonction de l'instant t. Il faut donc choisir une trentaine de valeur pour l'instant t. Comme une année dure 365,25 jours, c'est-à-dire 31557600 secondes, les valeurs qu'on choisit pour l'instant t doivent être comprises entre 0 et 31557600. De plus, il faut que les points soient équitablement répartis sur la ligne horaire, car on ne peut pas dessiner une ligne horaire si tous les points sont quasiment au même endroit et qu'il n'y a presque pas de points à un autre endroit. Pour que les points soient bien répartis, il faut choisir les valeurs de l'instant t à intervalle régulier. Par conséquent, si on choisit de prendre 30 points pour dessiner la ligne horaire qui indique midi, les 30 valeurs de l'instant t seront égales à:

$$\frac{k\cdot 31557600}{30}$$

- K est un nombre entier qui varie de 1 à 30.

Une fois que le nombre voulu de point a été dessiné, on relie les points entre eux, et on obtient la ligne horaire qui indique midi.

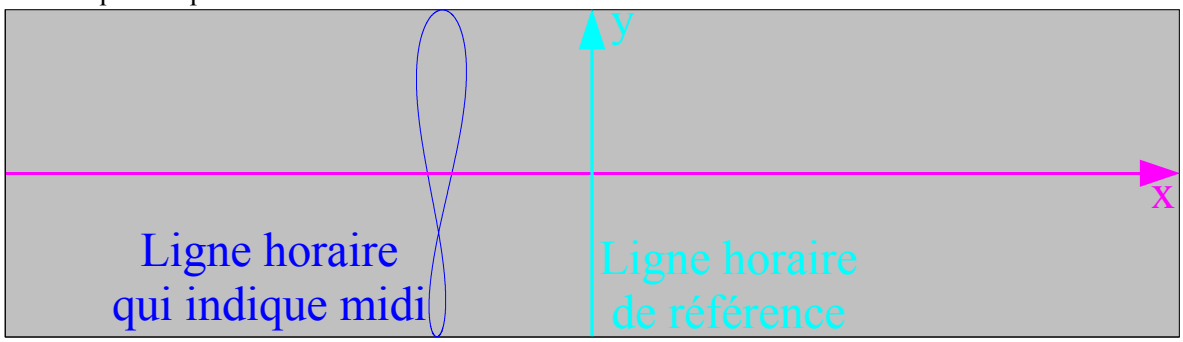


Schéma de la ligne horaire qui indique midi

Puis on recopie cette ligne horaire à droite et à gauche jusqu'à ce qu'on arrive au bord de la feuille. La distance, parallèlement à l'axe x, entre les lignes horaires est égale à:
rayon·ω_τ·intervalle de temps entre les lignes horaires

Cependant, lorsqu'on recopie la ligne horaire qui indique midi, on se trouve confronté à un problème. Les lignes horaires se chevauchent les unes dans les autres, et on n'y voit plus rien. Pour remédier à ce problème, il suffit de ne dessiner que la moitié des lignes horaires. Pour cela, il faut faire varier l'instant t uniquement depuis le solstice d'été jusqu'au solstice d'hiver, ou depuis le solstice d'hiver jusqu'au solstice d'été. Le solstice d'été correspond à l'instant t= 14623200. Le solstice d'hiver correspond à l'instant t= 30434400. Finalement, le cadran ne peut fonctionner que pendant une seule moitié de l'année. Mais pour avoir l'heure toute l'année, il suffit de construire deux cadrans solaires. L'un fonctionnera depuis le solstice d'été jusqu'au solstice d'hiver. L'autre fonctionnera depuis le solstice d'hiver jusqu'au solstice d'été.

Une fois que toutes les lignes horaires sont tracées, on les numérote.

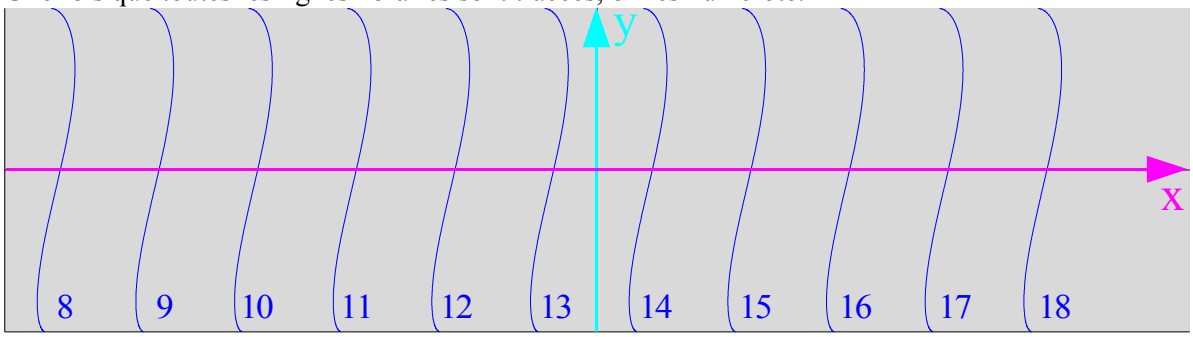


Schéma des lignes horaires

Concrètement, le traçage des lignes horaires est trop complexe pour pouvoir être fait à la main. Le traçage des lignes horaires doit donc se faire à l'ordinateur. En effet, premièrement, le traçage de la ligne horaire qui indique midi se fait point par point, et il faut dessiner au moins une trentaine de point si on ne veut pas que la courbe soit carrée bossue. Or, en tenant compte de la complexité des formules qui donnent les coordonnée des points, cela prendrait bien trop de temps de faire cela à la main. Deuxièmement, le traçage des autres lignes horaires se fait en déplaçant la ligne horaire qui indique midi. Or on ne peut pas être précis en faisant cela à la main, même avec de bonnes règles et équerres.

À l'ordinateur, dessiner la ligne horaire qui indique midi, c'est très pratique. En effet le nombre de points qu'on peut tracer pour dessiner cette ligne horaire est quasiment illimité. Pour simplifier, on peut, par exemple, choisir, pour l'instant t, toutes les valeurs multiples de 100. Dans ce cas, comme l'instant t est compris entre 0 et 31557600, on obtient 315576 points! Une fois que tous ces 315576 points sont reliés entre eux, on obtient donc une ligne horaire parfaitement lisse. En plus, comme les multiples de 100 sont parfaitement répartis, les points sont eux aussi parfaitement répartis sur la ligne horaire.

Ensuite, pour dessiner toutes les autres lignes horaires à droite (ou à gauche) de la ligne horaire qui indique midi, c'est très simple. Comme on déplace la ligne horaire qui indique midi parallèlement à l'axe x, il suffit de rajouter une constante sur la coordonnée x de chacun des 315576 points qui forment cette ligne horaire. Bien entendu, cette constante dépend de la distance entre les lignes horaires. Cette constante est donc égale à: $k \cdot \text{rayon} \cdot \omega_\tau \cdot$ intervalle de temps entre les lignes horaires

- k est un nombre entier qui varie depuis le nombre qui correspond à la ligne horaire qui se trouve tout à gauche de la feuille (k est négatif) jusqu'au nombre qui correspond à la ligne horaire qui se trouve tout à droite de la feuille (k est positif)
- Lorsque k vaut 0, on obtient la ligne horaire qui indique midi.

De cette façon on obtient des séries de 315576 points chacune. Pour obtenir les lignes horaires, il faut donc relier entre eux les 315576 points de chaque série. Finalement chacune des lignes horaires se compose de 315576 points qui sont parfaitement placés! Une fois que toutes les lignes horaires sont dessinées et numérotées, on imprime la feuille, puis on la colle sur la table du cadran solaire. Quand on colle la feuille sur le cadran solaire, il faut faire attention à ce que l'axe y corresponde exactement à la ligne horaire de référence, c'est-à-dire qu'il faut que l'axe y se trouve à l'endroit où la table touche le sol. L'axe y doit donc être au nord du style, dans le même méridien que le style. Quant à l'axe x, il doit être dans le même plan que le style. Comme sur un cadran classique, l'axe x forme un arc de cercle dont le centre correspond au style.

Pour avoir un exemple concret de cette méthode, une feuille de calculs contenant le calcul de l'équation des lignes horaires d'un cadran solaire qui prend en compte l'équation du temps est disponible en annexe.

De plus, cette méthode permet de créer des programmes qui dessinent automatiquement les lignes horaires d'un cadrans solaire armillaire qui prend en compte l'équation du temps. Un programme qui dessine automatiquement les lignes horaires d'un tel cadran est disponible en annexe.

Utilisation du cadran

L'utilisation d'un cadran solaire qui prend en compte l'équation du temps est extrêmement simple. Il suffit de repérer la tache d'ombre engendrée par le style, et de lire l'heure qui est écrite en dessus ou en dessous de la ligne horaire sur laquelle se trouve cette tache d'ombre. L'heure indiquée par le cadran est directement l'heure légale! Il n'y a plus besoin de rajouter de facteurs de correction. Il n'y plus besoin non plus de connaître la date. Le cadran s'occupe tout seul de rajouter l'équation du temps et le facteur de correction du fuseau horaire! Cependant si on se trouve dans un pays industrialisé dans lequel il y a un changement d'heure entre l'été et l'hiver, il faut parfois rajouter ou enlever une heure. Malgré cela, je pense que ce cadran est le plus pratique de tous les cadrans solaires.

Limite de la précision d'un cadran solaire

Le but d'un cadran solaire n'est pas d'être très précis. En règle générale, un cadran solaire n'est pas plus précis qu'une minute. La première chose qui limite la précision d'un cadran solaire, c'est que l'ombre du style est floue. Il y a en effet une zone de flou de chaque côté de l'ombre du style. En réalité, le soleil n'est pas un point sans dimension mais une sphère dont le rayon vaut $7 \cdot 10^8$ mètres. Bien que la distance terre-soleil soit égale à $1{,}471 \cdot 10^{11}$ mètres, les rayons du soleil qui arrivent à un point sur terre, ne sont pas exactement parallèles entre eux. L'angle maximal entre eux est égal à :

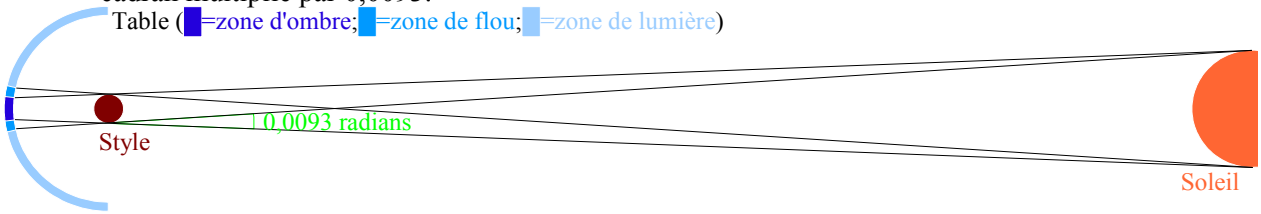
$$2 \arctan\left(\frac{\text{rayon du soleil}}{\text{distance terre-soleil}}\right) = 0{,}0093 \text{ radians}$$

Par conséquent, l'épaisseur de l'une des deux zones de flou est égale à :
0,0093 rayon

L'épaisseur de l'ombre du style avec les zone de flou est égale à :
épaisseur du style + 0,0093 rayon

Et l'épaisseur de l'ombre du style sans les zone de flou est donc égale à :
épaisseur du style - 0,0093 rayon

- Si on trouve un nombre négatif, cela signifie que le style n'est pas assez épais pour faire une ombre; et qu'il y a seulement une zone de flou. Quoi qu'il en soit, l'épaisseur de cette zone de flou est toujours supérieur au rayon du cadran multiplié par 0,0093. De plus c'est beaucoup plus lisible de regarder une vrai ombre qu'une zone de flou. Dans certain cas, cette zone de flou peut même être quasiment invisible. Il faut donc éviter que l'épaisseur du style soit plus petite que le rayon du cadran multiplié par 0,0093.



Quand on lit l'heure sur un cadran solaire, on regarde le milieu de l'ombre du style. Pour être le plus précis possible, il faut donc commencer par minimiser l'épaisseur de l'ombre du style. Quand l'épaisseur de cette ombre vaut 0, il reste une grande zone de flou bien visible qui est formée par les deux zones de flou mises côte à côte. Dans ce cas, il est facile de regarder le milieu de cette zone de flou, car c'est l'endroit où elle est la plus foncée. L'idéal, c'est donc que l'épaisseur de l'ombre du style soit égale à 0. Cela implique, que l'épaisseur idéal du style est égale à:
rayon 0,0093

Ensuite, pour que ce soit encore plus précis, il faut encore minimiser l'épaisseur cette grande zone de flou. Comme cette zone grande de flou est formée des deux zones de flou mises côte à côte, l'épaisseur de cette grande zone de flou est égale à:
0,0186 rayon

Pour minimiser l'épaisseur de cette grande zone de flou, il suffit donc de diminuer le rayon. On peut donc penser que plus un cadran solaire est petit, plus il est précis. Mais en réalité ce n'est pas le cas, car en diminuant le rayon, on diminue aussi la distance entre les lignes horaires. En effet la distance entre les lignes horaires est égale à:
rayon$\cdot\omega_\tau\cdot$intervalle de temps entre les lignes horaires

Pour que le cadran soit lisible, il faut que la distance entre les lignes horaires soit au moins égale à un millimètre. Mais plus la distance entre les lignes horaires est petite, plus il y a de lignes horaires, et donc plus le cadran est précis. L'idéal, c'est donc que la distance entre les lignes horaires soit égale à un millimètre. De plus l'intervalle de temps entre les lignes horaires correspond à l'inverse du nombre de lignes horaires. Par conséquent, plus l'intervalle de temps entre les lignes horaires est petit, plus le cadran est précis. Il faut donc minimiser l'intervalle de temps entre les lignes horaires. Mais pour cela, si on ne veut pas que la distance entre les lignes horaires descende en dessous d'un millimètre, il faut augmenter le rayon du cadran. Or en augmentant le rayon, on augmente aussi l'épaisseur de la zone de flou. On ne peut donc pas augmenter la précision de cette manière.

De toute façon, comme l'angle entre les rayons du soleil vaut 0.0093 radians, et que la vitesse angulaire de l'ombre du style, notée ω_τ, vaut $7{,}27 \cdot 10^{-5}$ radian/seconde, l'épaisseur des zones de flou correspond toujours à 128 secondes quelque soit les dimensions du cadran. Avec un style d'épaisseur idéale, on peut réduire cette erreur à une minute, en regardant bien le milieu de l'ombre.

Cependant, on peut se débarrasser de l'erreur engendrée par les zones de flou, en remplaçant le style par une lentille. La lentille permet d'obtenir une image du soleil. Sur la table, on obtient donc un disque de lumière nette. On peut améliorer la netteté de ce disque du lumière grâce à un diaphragme. La position de ce disque de lumière indique l'heure. Pour augmenter encore la précision, il suffit d'augmenter le rayon du cadran. L'image du soleil devient plus grande, mais on peut utiliser le bord du disque de lumière. En effet, la distance idéale entre les lignes horaires vaut un millimètre. De plus cette distance est égale à:
$\text{rayon} \cdot \omega_\tau \cdot$intervalle de temps entre les lignes horaires

Si on respecte la distance idéale entre les lignes horaires, on obtient l'équation suivante:
$\text{rayon} \cdot \omega_\tau \cdot$intervalle de temps entre les lignes horaires $= 0{,}001$

On voit en effet que plus le rayon augmente, plus l'intervalle de temps entre les lignes horaires diminue, et donc plus le cadran est précis. Finalement, plus un cadran solaire avec lentille est grand, plus il est précis. Mais cette précision a tout de même des limites. Il y a en effet beaucoup d'autres facteurs qui limitent la précision d'un cadran solaire:

- On considère que l'équation du temps se répète d'une année à l'autre. En réalité, ce n'est pas exactement le cas. En effet, chaque année, les valeurs de l'équation du temps se modifient légèrement par rapport à l'année précédente. En fait l'équation du temps évolue lentement au fil du temps. Cette évolution est due principalement à une évolution de l'angle entre le plan de l'équateur et le plan de l'écliptique, noté ε, de l'angle entre le périhélie et l'équinoxe de printemps, noté φ, et de l'excentricité de l'ellipse engendrée par la trajectoire du soleil, notée e. En effet ces trois paramètres ne sont pas fixes, mais ils évoluent continuellement au fil du temps. Les tableaux qui indiquent l'équation du temps ne sont valables que pendant 20 ans environ. Quant aux cadrans solaires qui prennent directement en compte l'équation du temps, ils ne fonctionneront précisément que pendant 20 ans. Comme l'équation du temps se modifie continuellement au fil des années, les tableaux qui indiquent l'équation du temps donnent des valeurs moyennes sur une période de 20 ans. Bien que théoriquement, on puisse calculer une valeur précise de l'équation du temps pour un moment précis d'une année donnée; on ne le fait jamais, car ce calcul est long et fastidieux, et que cela ne vaut pas la peine si on considère que la valeur qu'on calcule n'est valable avec précision que pendant quelques heures d'une année donnée! On ne calcule donc jamais précisément la valeur de l'équation du temps pour un moment précis, mais on calcule uniquement des moyennes.
- Les rayons du soleil sont légèrement déviés par un phénomène de réfraction lorsqu'ils entrent dans l'atmosphère terrestre.
- Il est difficile d'être précis lors de la fabrication d'un cadran solaire. En effet une erreur de seulement un dixième de degré engendre 24 secondes d'erreur. Or avec des outils de bricolage classique (scie, marteau, crayon, équerre, colle,…), il est difficile d'être plus précis qu'un degré.
- Il est très difficile de déterminer précisément la direction du sud. La boussole est inutilisable, car elle peut avoir plus de 10 degrés d'erreur, ce qui représente 40 minutes d'erreur. Il faut donc utiliser des techniques sophistiquées qui se basent sur la position du soleil dans le ciel. Malgré cela, il est très difficile de déterminer la direction du sud précisément. Ce facteur d'erreur est, de loin, le plus

important de tous, car c'est celui qui engendre la plus grand erreur.
- On considère que les autres planètes du système solaire n'ont aucun effet sur le système terre-soleil. En réalité ces planètes influencent très légèrement les mouvements du système terre-soleil. Cependant ce facteur d'erreur est négligeable par rapport aux autres facteurs d'erreur.

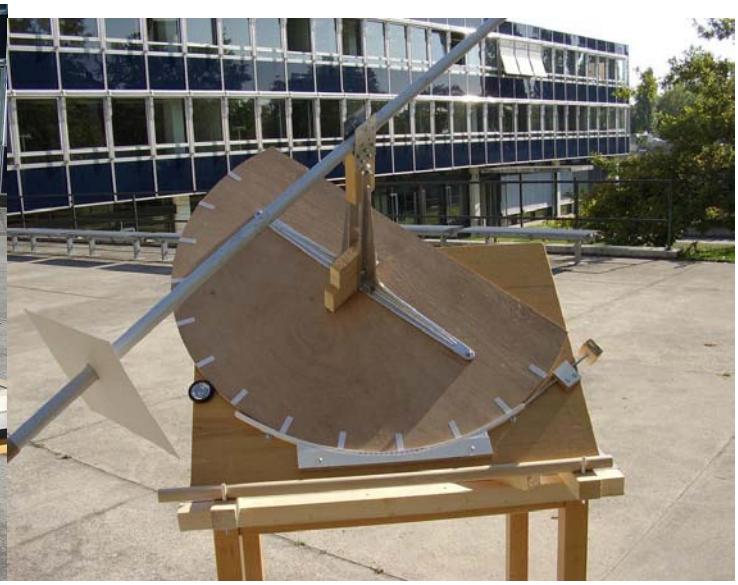
A cause de ces facteurs, la précision maximale d'un cadran solaire ne peut jamais dépasser une dizaine de secondes, même s'il est fabriqué de manière professionnelle.

Construction d'un cadran solaire très précis

On a construit un cadran solaire spécial très précis. Ce cadran fonctionne avec un tube équipé d'un diaphragme et d'une lentille. Ce cadran solaire comporte deux particularités: il n'a pas de style, et il comporte deux sous-cadrans solaires. Le premier de ces deux sous-cadrans est composé d'une table tournante plane de 45,5 centimètres de rayon graduée toutes les minutes. Le deuxième de ces deux sous-cadrans est un tube de 2 mètres. Pour fonctionner, ce tube doit être dirigé vers le soleil. Les rayons du soleil entrent dans le tube par un diaphragme, puis ils sont focalisés par une lentille. Finalement les rayons du soleil forment une image du soleil à l'autre bout du tube sur une feuille translucide graduée avec des lignes horaires. Ces lignes horaires vont de 0 à 2 minutes; et elles sont graduées toutes les 10 secondes. Ce cadran prend directement en compte le facteur de correction du fuseau horaire. De plus, il indique l'heure légale, mais c'est à l'utilisateur d'indiquer la valeur de l'équation du temps au cadran en ajustant une barre coulissante graduée toutes les 10 secondes qui épouse la plaque tournante.

Pour utiliser ce cadran, il faut d'abord chercher dans le tableau de l'équation du temps la valeur de l'équation du temps pour la date à laquelle on se trouve. Il faut ensuite tirer ou pousser la barre coulissante pour régler l'équation du temps; le curseur de l'équation du temps doit indiquer la valeur de l'équation du temps. Il faut ensuite orienter le tube vers le soleil. Le fait de faire tourner le tube fait tourner la table tournante. On lit l'heure en regardant la valeur indiquée par le curseur de la table tournante. Puis on regarde dans le tube. On voit alors l'image du soleil sur la feuille translucide. On lit le temps supplémentaire en regardant la position de l'image du soleil par rapport aux lignes horaires. On obtient l'heure légale en additionnant le nombre de secondes supplémentaire indiqué par le tube et l'heure indiquée par le curseur de la table tournante. La précision espérée était de 10 secondes. Mais concrètement, l'erreur s'élève à presque une minute. Cette erreur est probablement due à l'imprécision lors de la fabrication du cadran. En effet, ce cadran n'est qu'un prototype grossier qui a été construit avec des outils de bricolage classiques .

Pour conclure, je pense qu'un cadran solaire n'est pas fait pour indiquer l'heure précise, car pour obtenir l'heure précise, il est beaucoup plus simple de recourir aux montres mécaniques. Malgré cela, c'est un superbe objet qui est à la fois enrichissant, beau, et mystérieux. De plus, comme les cadrans solaires ont été pendant longtemps des objets de la vie quotidienne, il ne faut pas les abandonner; mais il faut les conserver précieusement en souvenir de leur époque, et en tant qu'objets historiques.



Photos du cadran solaire très précis qu'on a construit

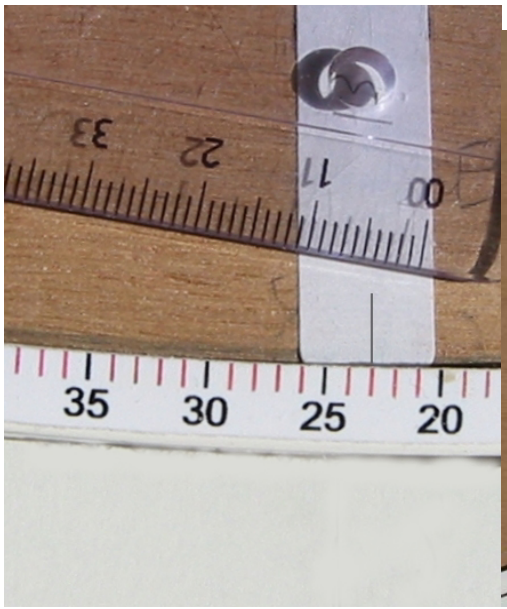


Photo de l'échelle des minutes

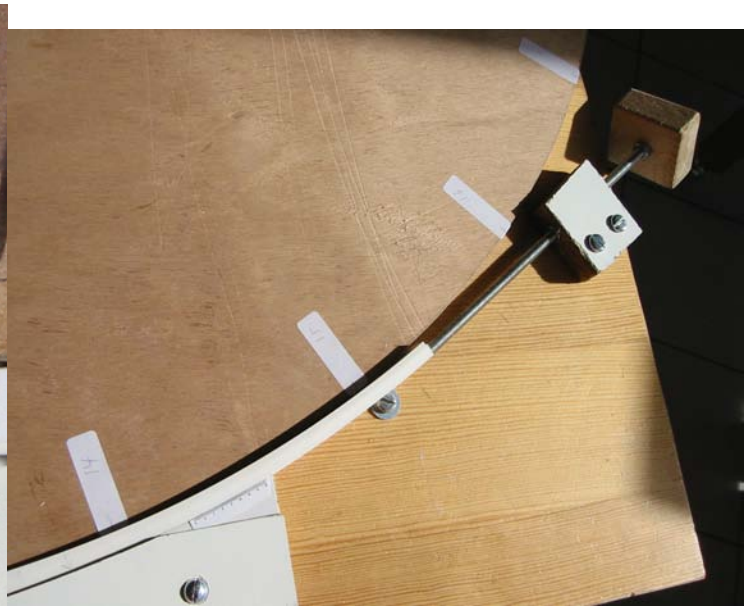


Photo de la barre coulissant pour le réglage de l'équation du temps

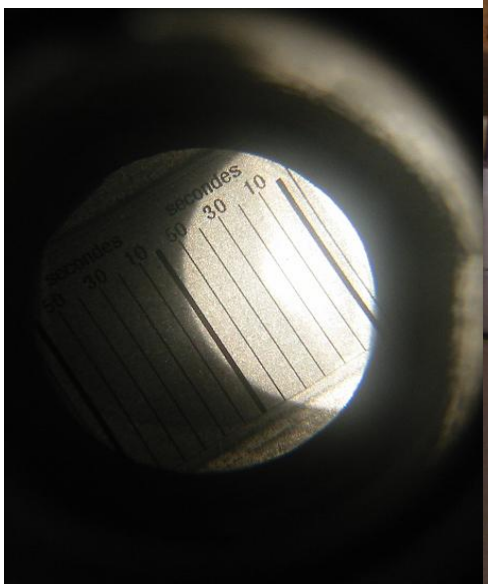


Photo de l'image du soleil sur la feuille translucide à l'intérieur du tube

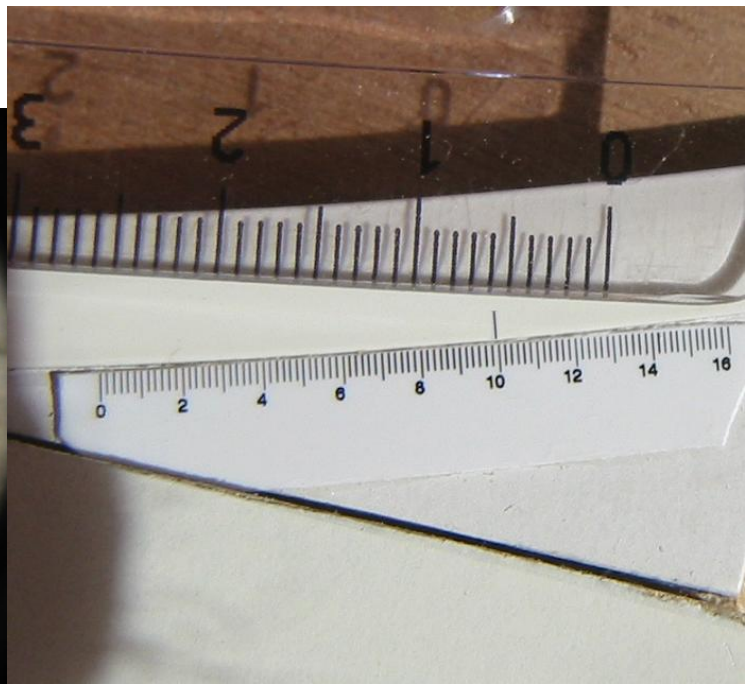


Photo de l'échelle de l'équation du temps

Bibliographie

- Denis SAVOIE, *Les Cadrans Solaires*, Belin - Pour La Science, Paris 2003
- Gianni PASCOLI, *Astronomie Fondamentale - Astronomie de position et mécanique céleste - 3e édition*, Dunod, Masson Sciences, Paris 2000
- Eugene HECHT, *Physique*, I.T.P., De Boeck, Bruxelles 1999
- Commissions romandes de mathématique, de physique et de chimie, *Formulaires et tables - Mathématique, Physique, Chimie*, éditions du Tricorne, Genève 2004
- Jean MEEUS + Denis SAVOIE, *Astronomie Volume 109*, 1995, page 188 à 193
- Site internet de l'institut de mécanique céleste et de calcul des éphémérides: http://www.imcce.fr/page.php?nav=fr/actualites/archive.php

Annexes

- Un CD contenant:
  - Une feuille de calculs contenant l'équation du temps calculée selon la première méthode
  - Une feuille de calculs contenant l'équation du temps calculée selon la deuxième méthode
  - Une feuille de calculs contenant un exemple de traçage des lignes horaires d'un cadran solaire armillaire qui prend en compte l'équation du temps
  - Un programme dessinant automatiquement les lignes horaires d'un cadran solaire armillaire qui prend en compte l'équation du temps.