IL FORO DELLE MERIDIANE A CAMERA OSCURA - CONSIDERAZIONI

GIANNI FERRARI

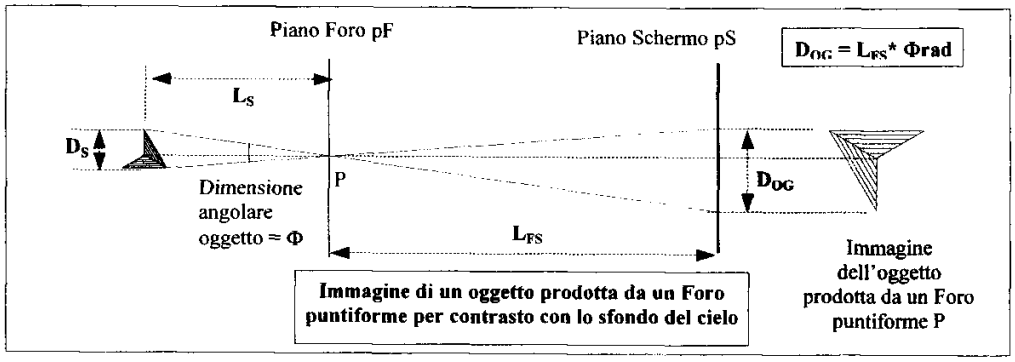
ESTRATTO

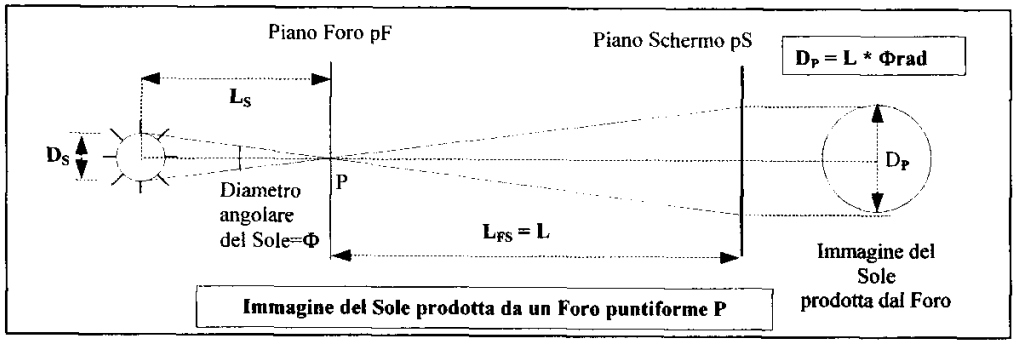
Vengono svolte alcune considerazioni sulle dimensione, sul posizionamento e sulla forma del foro gnomonico nelle meridiane a camera oscura.Sono anche discussi la forma e l'illuminamento della immagine proiettata del Sole e gli effetti della diffrazione su di essa. Viene infine data una relazione originale per il calcolo del diametro del foro.

Premessa

Consideriamo un oggetto o una sorgente luminosa di dimensioni angolari abbastanza piccole e due schermi non trasparenti, paralleli tra loro e disposti perpendicolarmente a un raggio luminoso uscente dal centro della sorgente e pratichiamo sullo schermo che si trova più vicino alla sorgente un foro di dimensioni teoricamente infinitesime e praticamente trascurabili, cioè molto minori della distanza fra gli schermi.
Le leggi dell'ottica geometrica permettono facilmente- di costruire l'immagine della sorgente prodotta dal foro sul secondo schermo, immagine che risulta teoricamente perfetta ma di scarsissima luminosità (infinitesima).

Nelle meridiane a camera oscura si desidera creare su uno schermo (parete, pavimento) l'immagine di una sorgente luminosa, il Sole, mentre nelle macchine fotografiche a foro stenopeico si vuole l'immagine di un oggetto di per se non luminoso ma visibile in genere per contrasto con lo sfondo del cielo o del panorama.





In seguito supporrò, salvo diversa indicazione, l'oggetto o la sorgente circolari ed i due piani entrambi perpendicolare al raggio luminoso. Userò la seguente simbologia :

- pF Piano del Foro : il piano contenente lo schermo su cui è stato praticato il foro;
- pS Piano dello Schermo : il piano su cui si forma l'immagine;
- D_F il diametro del Foro, circolare con centro nel punto P;
- L_{FS} o L la distanza Foro-Schermo, cioè la distanza fra i piani ;
- Φ la dimensione angolare dell'oggetto. È l'angolo sotto il quale il punto P "vede" l'oggetto. Se questo non è circolare con Φ indico una delle sue dimensioni angolari
- D_P la dimensione dell'immagine

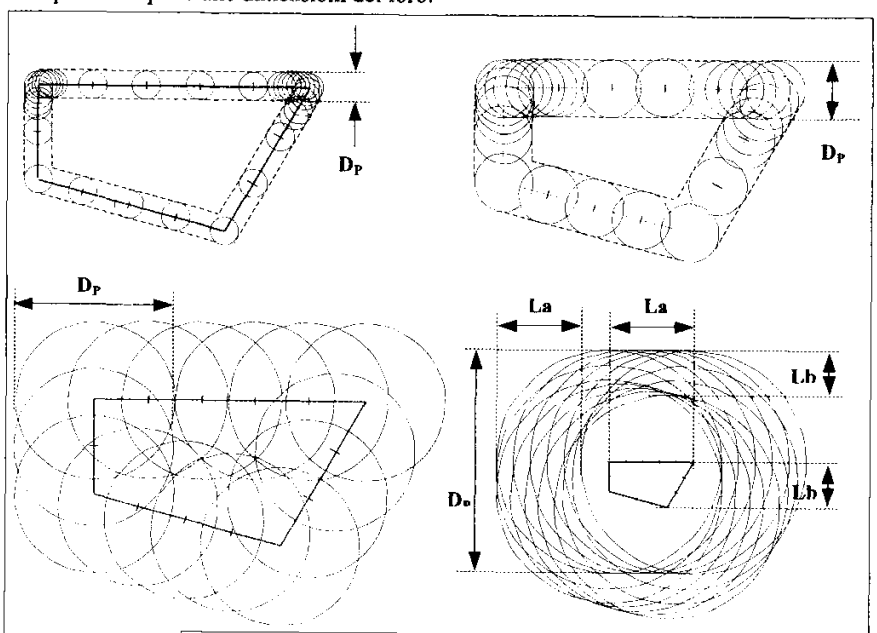
Si ha la relazione : $D_P = \frac{L_{FS}}{L_S} \cdot D_S = 2 \cdot L \cdot \tan(\Phi/2)$ che diventa, se Φ è inferiore a qualche grado e la tangente si sostituisce con il valore dell'angolo in radianti, $D_P = L \cdot \Phi_{rad}$

Poiché nelle meridiane a camera oscura l'"oggetto" che si vuole rappresentare è il Sole, l'angolo Φ è il diametro angolare medio del Sole che indicherò anche con Φ_0 = 32'= 1/ 107.5 rad.

Chiamerò **k** la costante 107.5, uguale all'inverso del diametro medio del Sole in radianti (Φ_0 = 1/k).
La relazione precedente diventa allora $D_P = L/107.5 = L/k$
Chiamerò infine "distanza fondamentale" la distanza L_0 fra i due schermi per cui l'immagine prodotta dal Sole con un foro *quasi* puntiforme, ha il diametro uguale a quello del foro stesso : è immediato ricavare che $L_0 = k \cdot D_F$.

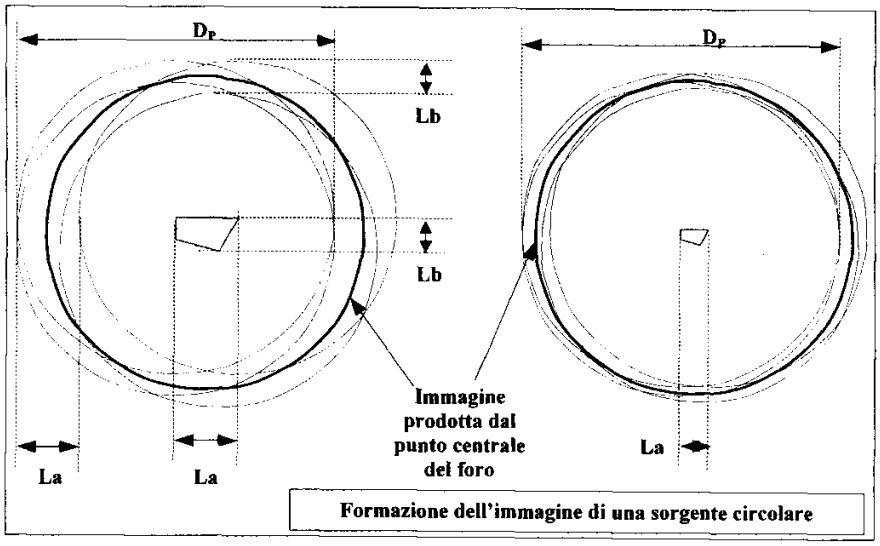
Immagine di una sorgente circolare prodotta da un Foro di dimensioni finite.
Cerchiamo ora di determinare l'aspetto dell'immagine della sorgente nel caso in cui il foro, praticato sullo schermo non trasparente, abbia dimensioni finite e forma qualunque.
Supponiamo di coprire il foro con una lamina opaca sulla quale sia stato creato un forellino, di forma qualunque e di area infinitesima (o piccolissima) : il risultato di questa operazione sarà quello di produrre sullo schermo una immagine della sorgente di bassissima luminosità (infinitesima) ma perfettamente netta e "a fuoco".
Ripetendo l'operazione, cioè creando sulla lamina un secondo foro spostato rispetto al primo, otterremo una nuova immagine , anch'essa netta e "a fuoco", leggermente spostata rispetto alla precedente.
Se in seguito poi pratichiamo infiniti forellini sulla lamina, tali da ricoprire il foro iniziale ripristinandolo, avremo infinite immagini, ciascuna perfettamente netta, che, sovrapponendosi, danno luogo alla immagine prodotta dal foro finito considerato all'inizio.
In conclusione, la figura che si forma come risultato di questo effetto integrale, appare come una immagine della sorgente tanto più "sfuocata" quanto più il foro è grande, e circondata da un alone di "incertezza" o, di "fuzzyness", della dimensione del diametro del foro.

Per avere una approssimazione semplificata dell'immagine prodotta é sufficiente considerare soltanto il punti-areoala che si trovano sul perimetro del foro stesso.
Nelle figure che seguono si sono costruite le immagini prodotte da un foro irregolare, a forma di quadrilatero con lati non paralleli, al crescere della distanza L fra foro e schermo o, il che è lo stesso, al crescere del diametro $D_P = L/k$ della immagine di un "punto" rispetto alle dimensioni del foro.



Formazione dell'immagine di una sorgente circolare

Dalla sequenza delle figure si può notare che l'aspetto dell'immagine prodotta varia molto al variare del rapporto $L/L_0 = D_P / D_F$ fra la distanza fra gli schermi e la distanza fondamentale o fra il diametro dell'immagine prodotta da un foro puntiforme e la dimensione della figura.



Formazione dell'immagine di una sorgente circolare

Al crescere di questo rapporto si ha che :

- sino a quando L/L_0 è piccolo, cioè sino a quando la distanza foro schermo è alquanto minore di L_0, **allora l'immagine che la sorgente circolare produce sullo schermo ha la stessa forma del foro, qualunque siano le forme della sorgente e del foro.**

  Non è possibile stabilire con un criterio scientifico quale sia il valore del rapporto L/L_0 al di sotto del quale l'immagine prodotta ha ancora l'aspetto del foro.

  Empiricamente questo valore si aggira su $\approx 0.2 \rightarrow 0.3$
- quando il valore del rapporto L/L_0 è compreso fra ≈ 0.3 e $\approx 3 \rightarrow 4$, la figura prodotta è una figura di confusione che non ricorda ne la forma del foro ne quella della sorgente
- crescendo ancora il rapporto la forma dell'immagine prodotta sullo schermo inizia ad assomigliare a quella della sorgente. Il fenomeno inizia circa quando il rapporto supera i valore $\approx 3 \rightarrow 4$. Questa "rassomiglianza" aumenta sempre più al crescere di L/L_0

In conclusione, quando la distanza foro schermo è alquanto maggiore della distanza fondamentale, **allora l'immagine prodotta dal foro sullo schermo ha la stessa forma della sorgente, qualunque sia la forma del foro.**
In queste condizioni si può osservare che l'immagine è circondata da una "fascia" di confusione la cui larghezza, nelle varie direzioni, tende sempre più ad avvicinarsi alla dimensione del foro in queste direzioni.

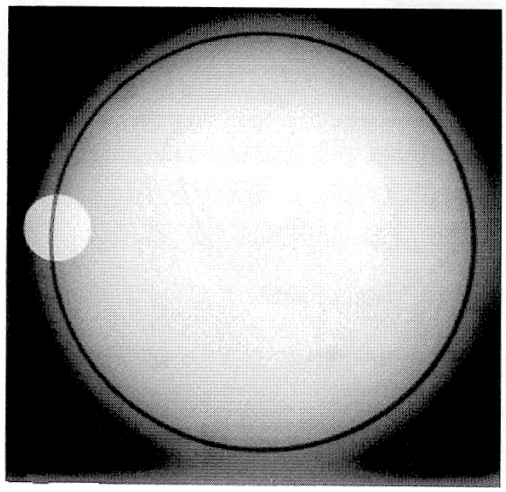
Nel caso che la sorgente sia il Sole avremo $\frac{L}{L_0} = \frac{L}{k \cdot D_F}$ e quindi :

- l'immagine sullo schermo ha la stessa forma del foro, sino a quando la distanza foro-schermo è inferiore a circa 20 – 30 volte il diametro del foro.Il foro è visto dallo schermo sotto un angolo superiore a circa 2° ;
- **l'immagine sullo schermo diventa sempre più prossima a un cerchio, qualunque sia la forma del foro, quando la distanza foro-schermo è superiore a circa 300 – 400 volte il diametro del foro.** Il foro è ora visto dallo schermo sotto un angolo di circa 10', per cui il Sole non è completamente visibile attraverso il foro stesso;
- l'immagine è "confusa", e ricorda sia la forma del foro che un cerchio, quando la distanza foro-schermo è compresa fra gli estremi sopra riportati
- infine, l'immagine della sorgente è circondata da una corona di confusione avente la larghezza uguale al diametro del foro.

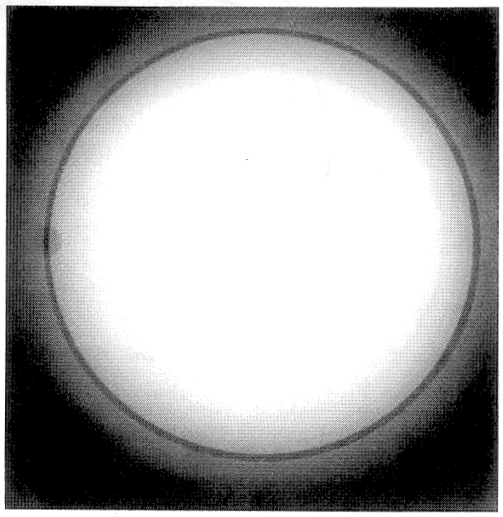
Per quanto detto quindi se la sorgente è il Sole, un foro potrà essere considerato **quasi puntiforme** quando $L \gg 107.5 \cdot D_F$, indipendentemente dalla dimensione reale del diametro D_F.

Esempio : si abbia una distanza Foro-Schermo L = 20m e un foro con D_F = 4cm di diametro.
Risulta : L_0=4.30m, L_0/D_F = 500 e una immagine del Sole di diametro D_P = 20/k = 18.6cm circondata da un alone di confusione di 4cm di larghezza. In questo caso il foro sarebbe visto dallo schermo sotto un angolo di 6.9'.

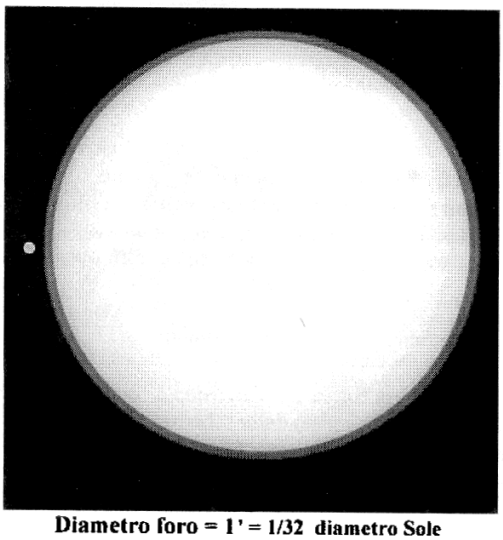
La costruzione descritta permette di ottenere la forma della immagine al variare della distanza fra foro e schermo ma non permette, salvo qualche indicazione qualitativa, di ricavare la distribuzione della intensità luminosa sulla immagine e quindi non permette di ricavare esattamente l'aspetto della immagine stessa.



Diametro foro = 5 ' = 1/6 diametro Sole



Diametro foro = 2 ' = 1/16 diametro Sole

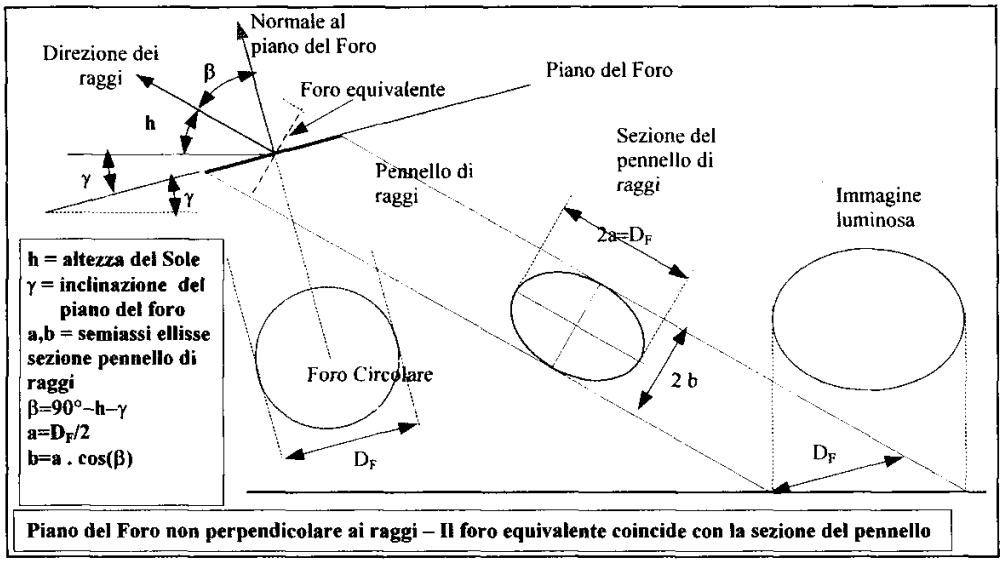


Diametro foro = 1 ' = 1/32 diametro Sole

Immagine di una sorgente circolare prodotta da un Foro di forma ellittica

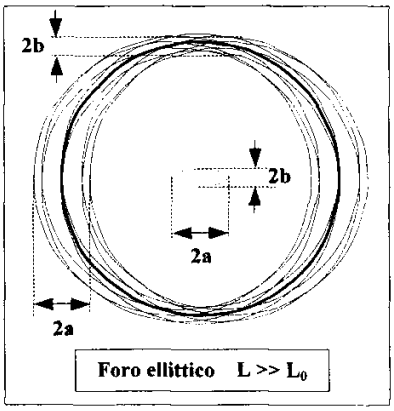
Spesso, e in particolare con le meridiane, il foro circolare che produce l'immagine del Sole è fisso e quindi il suo piano non può essere perpendicolare ai raggi provenienti dal Sole in tutte le stagione dell'anno.

Se il piano del foro circolare non è perpendicolare ai raggi provenienti dalla sorgente, il pennello dei raggi che colpisce lo schermo ha una sezione ellittica e l'immagine è uguale a quella che sarebbe prodotta da un foro "equivalente", posto su un piano perpendicolare ai raggi, avente la forma e le dimensioni della sezione del pennello di raggi.



Piano del Foro non perpendicolare ai raggi – Il foro equivalente coincide con la sezione del pennello

Si potrebbero ripetere, nel caso di foro ellittico, i ragionamenti già fatti in precedenza e riportare le figure che mostrano la forma della immagine da esso prodotta al crescere del rapporto $\frac{D_P}{D_F} = \frac{L}{L_0}$. Mi limiterò a mostrare soltanto il caso in cui $L \gg 107.5 \cdot D_F$ da cui si può osservare che la larghezza della fascia di "incertezza", che si trasforma in fascia di penombra[1] se la sorgente è il Sole, ha, in ogni direzione, la larghezza dell'ellisse in quella direzione.



Illuminazione dell'immagine – Aspetto della immagine

Sino ad ora si è visto come risulta la forma dell'immagine di una sorgente prodotta da un foro su uno schermo, ma questo non è sufficiente per determinarne l'"aspetto", cioè come essa ci appare, e questo per il fatto che l'aspetto di una figura dipende, principalmente, dalla diverse intensità di illuminazione nelle sue diverse zone.

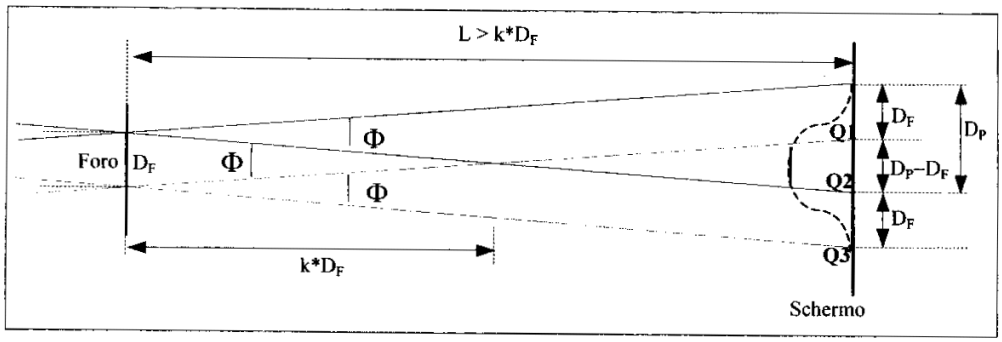
Non considererò la distribuzione spettrale della luce proveniente dalla sorgente, cioè le differenze di colore delle varie parti della immagine, che per altro ne influenzano l'aspetto in modo fondamentale: questa semplificazione è giustificata sia dalla necessità di una spiegazione semplice, sia dal fatto che nelle meridiane il colore non ha alcuna rilevanza e che la sorgente è sempre il Sole.

[1] Data una sorgente luminosa, che illumina un oggetto opaco e lo proietta su uno schermo, su questo una certa area è in penombra quando non è ne in piena luce, ne in ombra completa . In altre parole quando è illuminata soltanto da una porzione della sorgente.

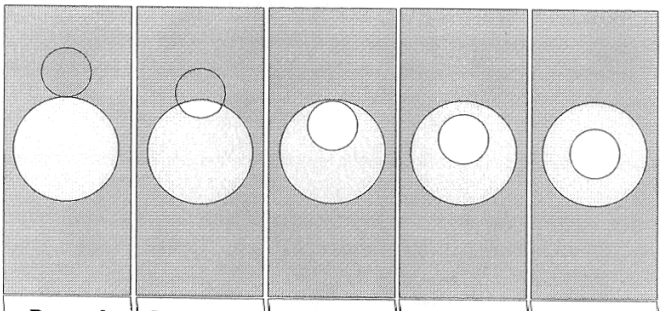
Indico con Jo l'illuminamento (energia luminosa per unità di superficie) prodotto dal Sole sul piano normale ai raggi passante per il centro del foro , supposto uniforme su tutta la superficie del foro stesso [2] .
Un metodo per trovare l'illuminamento dell'immagine prodotta consiste nel determinare, per ogni punto Q di essa, la parte della sorgente visibile.

Supponiamo per questo di mettere l'occhio esattamente nel punto Q e di guardare attraverso il foro [3], verso la sorgente.
Se vediamo l'intera sorgente, allora l'illuminamento nel punto Q da dove osserviamo è uguale a quello che si ha in un generico punto completamente illuminato, cioè $= J_0$.

Se invece vediamo soltanto una frazione f della superficie della sorgente, allora l'illuminamento sarà $= f \cdot J_0$



Se la sorgente è circolare con diametro angolare Φ è abbastanza semplice calcolare la frazione **f** della sua superficie vista da un qualunque punto Q appartenente al piano della immagine : mi limiterò soltanto al caso che ci interessa, in cui la distanza foro-immagine è molto maggiore (almeno 300-400 volte) del diametro del foro, cioè **L >> L_0** , prendendo in esame solo i punti appartenenti a un diametro della immagine.
In questo caso il diametro dell'immagine prodotta da un foro **puntiforme** è maggiore del diametro del foro $D_P = \frac{L}{k} = \frac{L}{L_0} \cdot D_F > D_F$ e per questo da un punto qualunque Q della immagine è possibile vedere il disco del Sole sempre solo parzialmente e mai nella sua piena totalità.



Punto al limite della penombra	Punto nella zona di penombra	Punto al limite della penombra	Punto nella zona in piena luce	Punto nel centro dello schermo

Il foro visto dai punti dello schermo.
Attraverso il foro si vede o il cielo o una parte del Sole.
Il disco più grande rappresenta il disco solare come si vedrebbe se non ci fosse lo schermo forato.

Con parole diverse : il diametro angolare del foro, visto dal piano immagine, è sempre inferiore a quello del Sole.

[2] Con il Sole ad una altezza di circa 45-50°, con cielo perfettamente sereno, il valore di J_0 è di circa 100000 lux. Per confronto ricordo che il valore di illuminamento su una superficie orizzontale prodotto da un cielo molto nuvoloso è di circa 1000 lux , quello prodotto da una lampada ad incandescenza da 60W posta a 1 m di distanza è di circa 100 lux e infine quello prodotto dalla luce della Luna piena di circa 0.2 lux.
[3] **Non osservare MAI il Sole direttamente senza una opportuna e sicura protezione !**

Se il punto Q è abbastanza centrato (fra i punti Q1 e Q2 di figura) da esso si vede, attraverso il foro, soltanto la superficie del Sole ; l'illuminamento in questo punto è quindi dato da :

$$J_Q = J_0 \cdot \left(\frac{D_F}{D_P}\right)^2 = J_0 \cdot \left(\frac{L_0}{L}\right)^2 = J_0 \cdot \left(\frac{107.5 \cdot D_F}{L}\right)^2 < J_0$$

Se spostiamo l'occhio lungo il diametro della immagine, avremo che l'illuminamento rimane costante, e uguale a valore riportato, sino a quando attraverso il foro è visibile soltanto la superficie del disco solare: è immediato ricavare che la distanza massima dal centro $= (D_P - D_F)/2$.

Al di là di questa distanza dallo schermo risulta visibile una parte del Sole e una parte del cielo intorno che, aumentando la distanza dal centro, diventa sempre maggiore (punto Q3).

Vi è quindi una striscia di penombra nella quale l'illuminamento diminuisce dal valore centrale J_C a zero ;

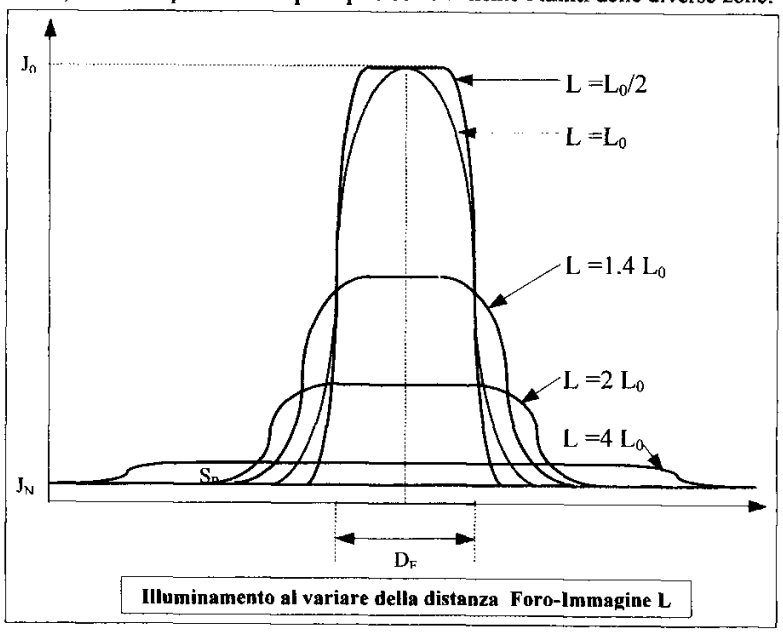
la larghezza di questa striscia è = D_F per cui il diametro dell'intera immagine risulta essere $= (D_P + D_F)$

Al crescere della distanza L fra foro e schermo, l'illuminamento massimo centrale cala molto rapidamente e l'immagine si allarga sempre più ; se il diametro del foro D_F si mantiene costante, allora l'energia luminosa che entra rimane costante, mentre aumenta in proporzione quadratica la superficie su cui essa viene distribuita.

Riporto nella figura gli andamenti dell'illuminamento per alcuni casi di distanza Foro-Immagine

Da essa si può notare come l'illuminamento diminuisce molto rapidamente quando la distanza Foro-Immagine è maggiore di $L0=kD_F$, mentre i fronti si fanno sempre meno ripidi al crescere di tale distanza.

Questo significa che quando la distanza è piccola, il passaggio fra la zona centrale intensamente illuminata (J_0) e la zona in ombra in cui l'illuminamento è dovuto soltanto alla luce diffusa (J_{ND}) [4], è rapido e quindi molto facilmente percepibile, mentre quando le distanze sono abbastanza grandi diventa sempre più graduale la transizione fra una zona poco illuminata e l'ombra, rendendo più difficile percepire correttamente i limiti delle diverse zone.



Illuminamento al variare della distanza Foro-Immagine L

Illuminazione dell'immagine – Foro ellittico

Se indichiamo con β l'angolo fra la normale a un foro circolare e la direzione dei raggi, la sezione del pennello ha l'asse maggiore perpendicolare al piano individuato dalla direzione dei raggi e dalla normale al foro (piano principale del pennello) ed ha una lunghezza $2 \cdot a = D_F$ essendo D_F il diametro del foro.

L'asse minore invece ha la lunghezza data da $2 \cdot b = D_F \cdot \cos(\beta)$ e giace sul piano principale sopra definito.

[4] Ricordo che l' illuminamento in locali poco illuminati, come le chiese, è in genere compreso fra 15 – 50 – 100 lux per cui JND ha circa questi valori. Il valore dell'illuminamento indiretto dovuto al cielo, all' aperto, può variare moltissimo al variare delle condizioni del cielo : con cielo sereno in estate può arrivare a 15000 lux mentre con cielo molto nuvoloso si riduce a circa 1000; su una superficie orizzontale al tramonto si hanno circa 380 lux. L'illuminamento richiesto per una lettura confortevole è di almeno 300 lux, quello previsto per strade poco illuminate di circa 15 – 30 lux ed infine quello prodotto dalla Luna Piena di circa 0.25 lux.

Se disponiamo, a una certa distanza dal foro, uno schermo normale all'asse del pennello di raggi provenienti da una sorgente luminosa non puntiforme, questi formeranno su di esso una immagine perfettamente uguale a quella che sarebbe prodotta da un foro ellittico, di semiassi a, b, praticato su un piano ortogonale ai raggi stessi.
Tutti i ragionamenti fatti in precedenza sono ancora perfettamente validi.
Se la sorgente è il Sole e distanza foro-immagine è maggiore di qualche volta la distanza fondamentale L_0, allora l'immagine del Sole sarà all'incirca circolare e sarà circondata da una fascia di penombra avente una larghezza uguale a D_F in una direzione e = 2b nella direzione perpendicolare.
Per l'esattezza

- la zona centrale è anch'essa un ellisse con assi dati da $\left[D_P - D_F\right]$ e $\left[D_P - D_F \cdot \cos(\beta)\right]$
- l'intera immagine ha assi dati da $\left[D_P + D_F\right]$ e $\left[D_P + D_F \cdot \cos(\beta)\right]$
- la fascia di penombra ha le larghezze date da $\left[D_F,\ D_F \cdot \cos(\beta)\right]$
- l'illuminamento della zona centrale vale $J = J_0 \cdot \left(\frac{D_F}{D_P}\right)^2 \cdot \cos(\beta)$

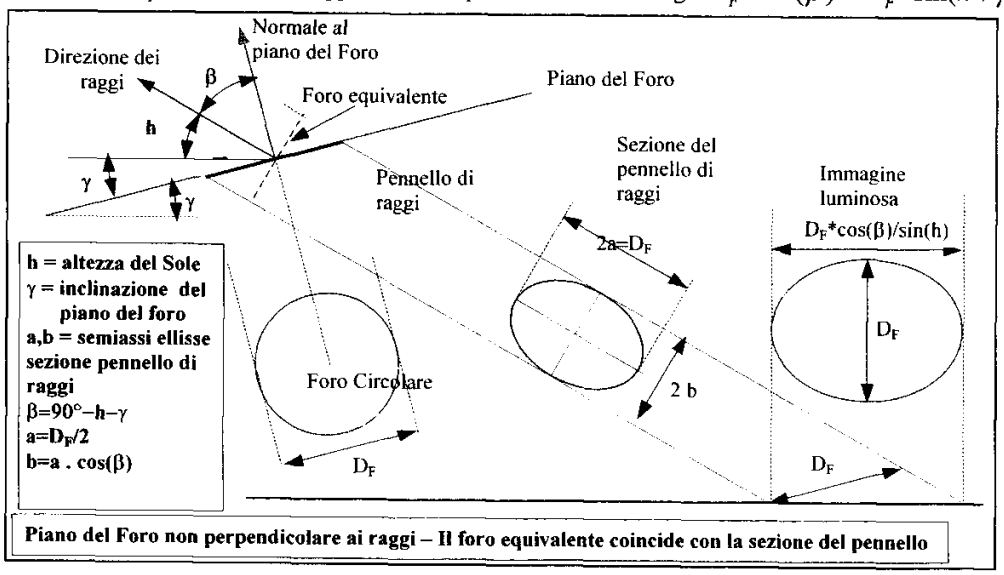
Esempio
Sia D_F = 2 cm, L = 30 m = 3000 cm, β = 45° J0 = 100000 lux
Si ricava L_0 = 215 cm ; L/L_0 = 14 ; D_P = 27.9 cm
Immagine normale ai raggi :

– zona centrale	di	25.9 x 26.5 cm
– intera immagine	di	29.9 x 29.3 cm
– fascia di penombra con larghezze	di	2.0 e 1.4 cm
– illuminamento centrale		0.0036 $J_0 = J_0$ / 275.5 (circa 360 lux)

Con il foro perpendicolare ai raggi si avrebbe:

– zona centrale di diametro		25.9 cm
– intera immagine di diametro		29.9 cm
– fascia di penombra di larghezza	di	2.0 cm
– illuminamento centrale		0.0051 $J_0 = J_0$ / 194.8

Pennello di raggi entrante in un foro circolare - Piano principale coincidente con un piano verticale. Sorgente puntiforme
Supponiamo ora **che la sorgente Sole sia puntiforme** e che il piano normale al piano del foro contenente la direzione dei raggi (piano principale) sia un piano verticale, coincidente, nelle meridiane a camera oscura, con il piano Meridiano.
Indichiamo con β l'angolo fra la normale al piano del foro e la direzione dei raggi, con γ l'inclinazione del piano del foro sul piano orizzontale e con **h** l'altezza del centro del Sole.
La sezione normale del pennello di raggi che attraversa il foro ha forma ellittica, con l'asse maggiore orizzontale di lunghezza uguale a D_F e l'asse minore appartenente al piano meridiano e lungo $D_F \cdot \cos(\beta) = D_F \cdot \sin(h+\gamma)$.



Piano del Foro non perpendicolare ai raggi – Il foro equivalente coincide con la sezione del pennello

Se il piano immagine, avente lo stesso Azimut del Sole e del piano del foro, è un piano inclinato dell'angolo σ rispetto ai raggi - e quindi di (σ – h) rispetto all'orizzontale - , allora l'immagine è un ellisse con un asse sul piano verticale e l'altro ad esso perpendicolare, aventi lunghezze date da D_F e $D_F \cdot \frac{\sin(h+\gamma)}{\sin(\sigma)}$

Da notare che i due assi sono uguali, e l'immagine è circolare con diametro D_F, se $\sigma = h+\gamma$, cioè se $\sigma - h = \gamma$, cioè se il piano immagine ha la stessa inclinazione del piano del foro, rispetto all'orizzonte

Questo risultato ha validità generale, **nel caso di sorgente puntiforme**: *se il piano del foro e quello dell'immagine sono fra loro paralleli l'immagine è esattamente uguale al foro,* essendo due sezioni dello stesso pennello di raggi fatte con piani fra loro paralleli.

Se poi il piano immagine coincide con il piano orizzontale allora l'angolo σ = h e quindi gli assi della immagine hanno lunghezze D_F (asse minore) e $D_F \cdot \frac{\sin(h+\gamma)}{\sin(h)}$ (asse maggiore)

La cosa **NON** è esattamente valida se si considera l'immagine prodotta da una sorgente **NON puntiforme** come il Sole.

Pennello di raggi entrante in un foro circolare - Piano principale coincidente con un piano verticale.
Sorgente non puntiforme

Se la distanza Foro-Immagine **L >> L_0**, allora da un punto qualunque Q della zona centrale si vede soltanto una parte del Sole avente superficie $= \frac{\pi}{4} \cdot Da \cdot Db = \frac{\pi}{4} \cdot (D_F)^2 \cdot \cos(\beta)$ e quindi l'illuminamento della zona centrale della macchia vale $J = J_0 \cdot \frac{Da \cdot Db}{D_P^{\,2}} = J_0 \cdot \left(\frac{D_F}{D_P}\right)^2 \cdot \cos(\beta)$

Se il piano immagine è il piano orizzontale si ha :

- Zona centrale con illuminamento costante con

  asse trasversale $D_P - D_F$; asse longitudinale $\frac{D_P - D_F \cdot \sin(h+\gamma)}{\sin(h)}$

  Illuminamento zona centrale $J = J_0 \cdot \left(\frac{D_F}{D_P}\right)^2 \cdot \sin(h) \cdot \sin(h+\gamma)$

- Immagine complessiva con :

  asse trasversale $D_P + D_F$; asse longitudinale $\frac{D_P + D_F \cdot \sin(h+\gamma)}{\sin(h)}$

- Striscia di penombra di larghezza :

  D_F lungo l'asse trasversale ; $\frac{D_F \cdot \sin(h+\gamma)}{\sin(h)}$ lungo l'asse longitudinale

Se il piano del foro è anch'esso orizzontale, essendo γ = 0°, le relazioni diventano:

- Zona centrale con illuminamento costante con

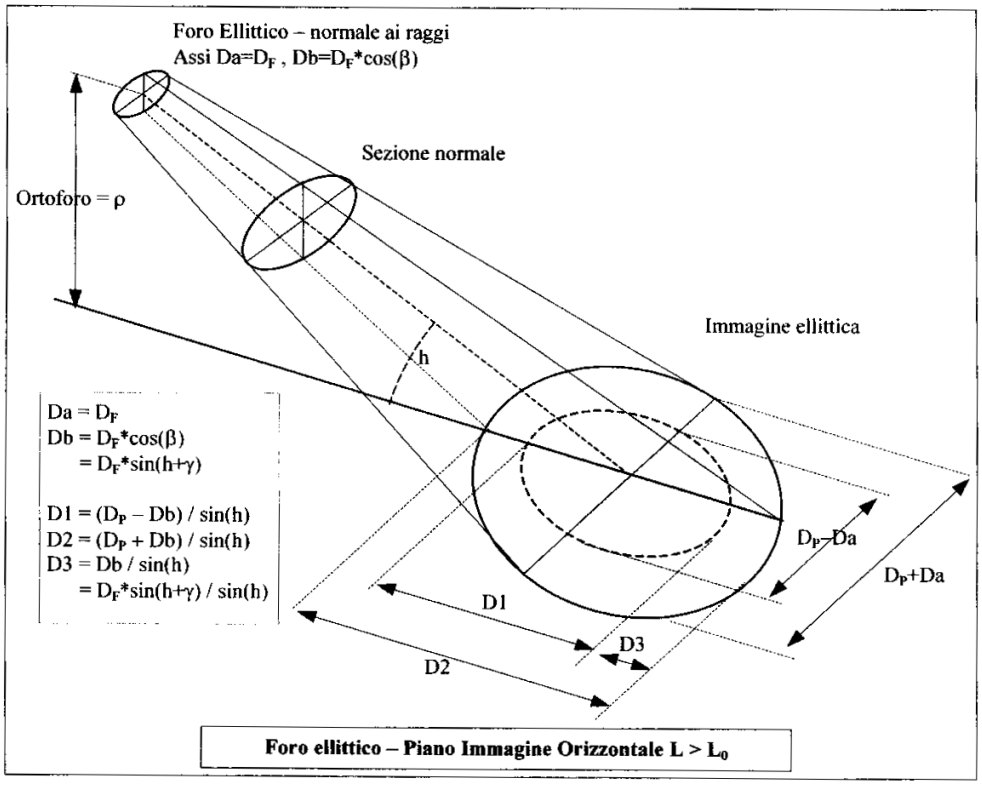
  asse trasversale $D_P - D_F$; asse longitudinale $\frac{D_P - D_F \cdot \sin(h)}{\sin(h)} = \frac{D_P}{\sin(h)} - D_F$

  Illuminamento zona centrale $J = J_0 \cdot \left(\frac{D_F \cdot \sin(h)}{D_P}\right)^2$

- Immagine complessiva con :

  asse trasversale $D_P + D_F$; asse longitudinale $\frac{D_P}{\sin(h)} + D_F$

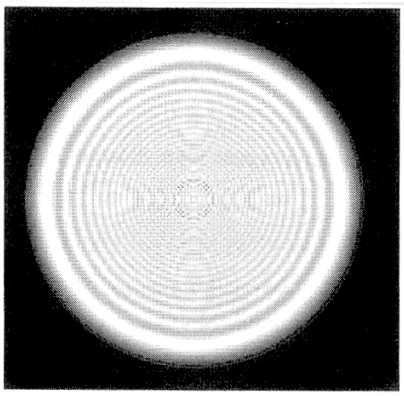
- Striscia di penombra di larghezza : costante = D_F



La "nitidezza" della immagine – La diffrazione

L'ottica geometrica ci dice che l'immagine prodotta su uno schermo da una sorgente puntiforme posta a distanza infinita, attraverso un foro di diametro D_F, è un dischetto avente lo stesso diametro del foro, illuminato uniformemente. Se la sorgente ha dimensioni finite, come ad es. il Sole, ogni punto di essa produce una figura circolare come quella descritta e l'immagine complessiva, data dalla sovrapposizione di questi infiniti cerchi luminosi, risulta quindi tanto più "confusa" e "sfuocata" quanto più grande è il diametro del foro. In questo caso la separazione angolare minima che devono avere due punti dell'immagine fra loro vicini per poter essere "risolti", cioè visti come separati, è data da

$$\theta_G \cong \frac{D_F}{2 \cdot L} .$$



Ad esempio con L =20m e D_F=2cm si ha $\theta_G \simeq 1/2000$ rad $\simeq 1.7'$, in pratica uguale al potere separatore dell'occhio umano medio.

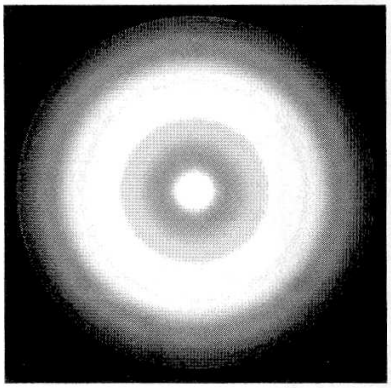
Utilizzando soltanto l'ottica geometrica abbiano già trovato, che per avere una immagine "abbastanza" nitida del Sole sul piano della meridiana, occorre che la distanza L fra il foro e il piano sia almeno 300 – 400 volte il diametro D_F del foro stesso, cioè $L \gg 107.5 \cdot D_F$: più diminuisce il diametro del foro, a parità della distanza L, più stretta è la fascia di penombra e di incertezza che circonda l'immagine e più "nitida" è l'immagine stessa.

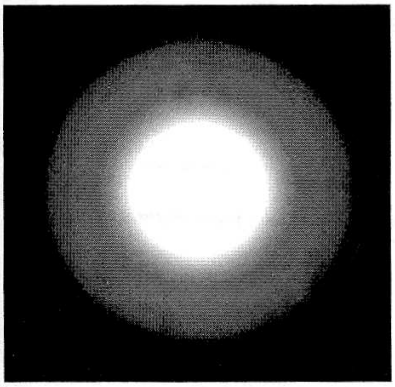
Se si considera la natura ondulatoria della luce occorre però tener conto anche del fenomeno della diffrazione prodotta dal foro circolare. Nel caso di **sorgente monocromatica e puntiforme**, fino a quando il diametro del foro D_F è abbastanza grande, l'immagine è circolare con diametro D_F e con una luminosità quasi costante. La diffrazione produce in questo caso soltanto degli anelli esterni più luminosi aventi larghezze dell'ordine di $\approx \sqrt{\frac{L}{10000}} \doteq \sqrt{\frac{L}{20000}}$ (grandezze in cm).

Questa condizione permane sino a quando $D_F > K \cdot \sqrt{\lambda \cdot L}$, con K = 5 circa ; con lunghezza d'onda della luce λ = 650 - 550 nm, la condizione è quindi valida sino a quando $D_F > \sqrt{\frac{L}{400}} \doteq \sqrt{\frac{L}{800}}$ (grandezze in cm) .

Nella figura precedente L = 4m, D_F = 2 cm λ = 550nm ; la condizione precedente è soddisfatta ($D_F > 0.7 \doteq 1.0$), la larghezza dell'anello esterno è di circa 1.4-2 mm mentre il diametro totale dell'immagine è =20 mm (sporgente puntiforme).

Quando il diametro del foro diminuisce il fenomeno della diffrazione produce invece una immagine costituita da un macchia luminosa centrale, in cui si concentra circa l'85% dell'energia luminosa, circondata da anelli di intensità molto debole. Nelle figure, in cui D_F = 6 e 3mm, il contrasto è stato molto aumentato per evidenziare gli anelli che sono, in realtà, molto deboli rispetto alla macchia centrale.





Il diametro del disco centrale è dato (formula di Airy) da : $D_{IMM} = 2.44 \cdot \lambda \cdot \frac{L}{D_F}$ e quindi aumenta al diminuire della dimensione del foro.

Pur non essendo la luce solare monocromatica si può prendere la lunghezza d'onda o uguale a circa 600-650nm, in cui l'occhio umano ha la massima sensibilità, o uguale di 550 nm, in cui si ha circa il massimo della emissione.

Questi valori danno un diametro dell'immagine di $D_{IMM} = 2.44 \cdot \lambda \cdot \frac{L}{D_F} \cong \frac{L/D_F}{6500}$, o di $\cong \frac{L/D_F}{7450}$.

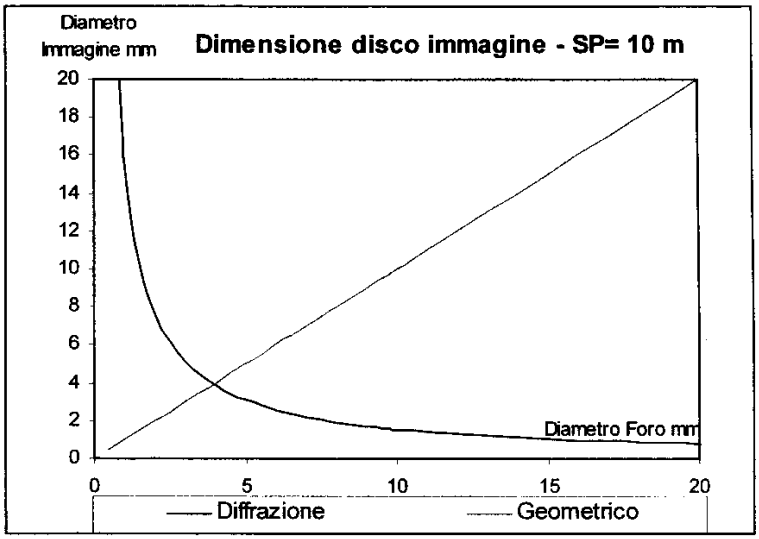
La separazione angolare minima, cioè il potere separatore, dovuto al foro quando l'effetto della diffrazione è sensibile, è dato da $\theta_{diffrazione} \cong \frac{1.22 \cdot \lambda}{D_F}$ (formula di Rayleigh).

Nel caso che la sorgente non sia monocromatica si ha la sovrapposizione, nel centro, di più dischi luminosi dovuti alle diverse lunghezze d'onda, e un figura complessiva avente un diametro circa uguale a quello del disco prodotto dalla radiazione a lunghezza d'onda maggiore.

Nel caso infine di **sorgente non puntiforme** la diffrazione produce uno "sfuocamento" della immagine poiché ogni suo punto produce una figura del tipo sopra descritto (cerchio di confusione). Non si ha ovviamente una macchia centrale più luminosa mentre si possono presentare, alla periferia delle deboli frange di diffrazione o degli anelli, se la sorgente è circolare come il Sole.

In conclusione, se la sorgente è il Sole, ogni punto dell'immagine è "sfuocato" di una quantità uguale al diametro del foro se il foro è "grande" e della quantità sopra indicata se il foro è "piccolo".
Al diminuire del diametro del foro l'immagine diventa sempre più nitida sino a quando il fenomeno della diffrazione non diventa preponderante.
Nel grafico sono riportate le dimensioni della immagine centrale, prodotta da una **sorgente monocromatica puntiforme,** al variare del diametro del foro, calcolate usando l'ottica geometrica e il fenomeno della diffrazione. Da notare che per diametri abbastanza grandi la macchia di diffrazione diventa trascurabile rispetto alla figura complessiva.

Per ottenere l'immagine più "nitida" e meno sfuocata possibile conviene allora diminuire il diametro del foro sino a quando non diventa uguale a quello del disco-immagine prodotto dalla diffrazione : è questa la soluzione adottata dagli appassionati di pin-hole photography per diminuire l'effetto di "sfuocamento".



Questo diametro "ottimo" si ricava immediatamente dalle relazioni prima riportate :

$$D_{FO} \cong \sqrt{\frac{L}{6500}} \cong \frac{\sqrt{L}}{80} \text{ o anche } D_{FO} \cong \sqrt{\frac{L}{7450}} \cong \frac{\sqrt{L}}{86} \quad \text{(grandezze in cm)}$$

Al diminuire del diametro del foro, l'illuminamento della immagine diminuisce e, in particolare con il diametro "ottimo", esso diventa molto basso essendo il foro eccessivamente piccolo.
Risulta infatti, supponendo lo schermo normale ai raggi:

$$J_C = J_0 \cdot \left(\frac{D_F}{D_P}\right)^2 = J_0 \cdot \left(\frac{107.5 \cdot D_F}{L}\right)^2 = J_0 \cdot \frac{1.78}{L} \text{ oppure } = J_0 \cdot \frac{1.55}{L} \quad \text{(L in cm)}$$

Ad es. nella meridiana in S. Maria degli Angeli a Roma, con L = 30m si avrebbe D_{FO} = 6.4 – 6.8mm e $J_C = J_0/1680$ o $J_0/1930$ (attualmente il diametro dl foro è di 20.3mm e l'illuminamento della immagine è circa 9-10 volte superiore)[5].

Il diametro del foro in una meridiana a camera oscura

La ricerca del diametro "migliore" per una meridiana a camera oscura è oggetto di dibattito da diversi secoli e questo principalmente per il fatto che il fenomeno di cui stiamo parlando è abbastanza complesso poiché entrano in gioco fattori di diversa natura - geometrici, ottici, fisiologici - non tutti facilmente definibili con formule matematiche.
L'aspetto dell'immagine che noi vediamo (e che misuriamo usando la vista) non dipende infatti soltanto da considerazioni geometrico gnomoniche ma anche dal meccanismo della nostra visione, dal rapporto fra l'illuminamento della zona centrale della immagine, dovuto ai raggi diretti dal Sole, e quello delle zone circostanti, dovuto alla illuminazione indiretta del locale, e quindi dal contrasto che nell'immagine presentano le zone diversamente illuminate.
L'illuminamento della zona centrale della immagine dipende, oltre che dal diametro del foro, dalla inclinazione del suo piano rispetto all'orizzontale, dalla sua altezza e dalla distanza fra foro e immagine, grandemente variabile al variare delle stagioni e della altezza meridiana del Sole.
La quantità di luce indiretta che arriva al pavimento dipende invece principalmente dalla superficie delle finestre, dalla natura e dal colore dei vetri e delle vetrate e dal loro orientamento, dagli edifici esterni le cui pareti riflettono la luce, dalla loro disposizione e dal loro colore, e infine dalle condizioni atmosferiche del cielo.
Infine il contrasto che la nostra vista percepisce fra le zone diversamente illuminate varia in funzione anche delle caratteristiche del pavimento e della natura del materiale, opaco o lucido, chiaro o scuro, più o meno riflettente, che lo costituisce.
Più alta è la quantità di luce indiretta che arriva al pavimento e più chiaro è il suo colore, tanto minore è il contrasto apparente dell'immagine, di cui difficilmente riusciamo a delimitare il bordo, e tanto più scadente ci appare il suo aspetto.

[5] Gli effetti della diffrazione non soltanto si hanno con alti valori del rapporto L/D_F , ma per essere visti occorre che la illuminazione indiretta sia quasi nulla, sia perché il Sole non è una sorgente monocromatica e puntiforme, sia per la bassissima intensità di illuminamento degli anelli.

La molteplicità dei fattori elencati che entrano in gioco rende molto difficile ottenere osservazioni ripetitive e soddisfacenti in una stessa meridiana e praticamente impossibile il confronto fra situazioni, chiese e stagioni diverse.

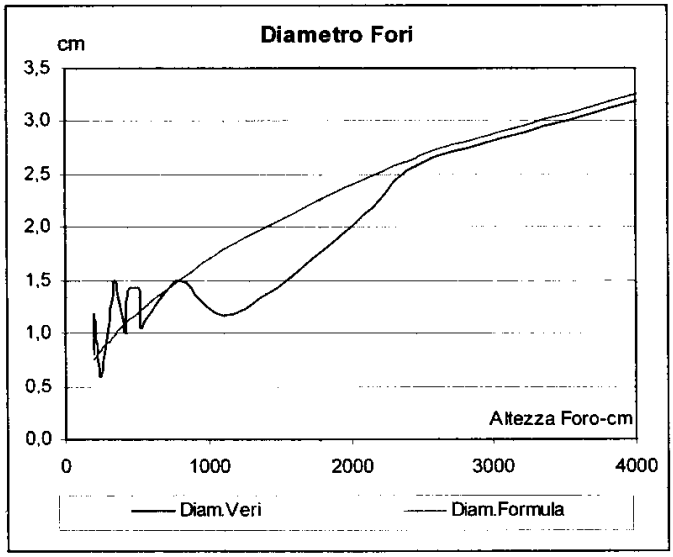
Occorre poi osservare che anche il diametro dell'immagine, e non solo il suo aspetto e il suo contrasto, cambia al variare dell'illuminamento indiretto. A causa infatti delle caratteristiche fisiologiche del fenomeno della visione (legge di Fetchner), se l'illuminamento indiretto diminuisce (ad es. se nel locale chiudiamo le finestre o se il cielo di fronte a queste si rannuvola) il "limite" della immagine che vediamo si sposta verso il suo bordo esterno, mentre avviene il contrario se l'illuminamento aumenta.
Per questo motivo il limite dell'immagine che vediamo non coincide con il limite "geometrico" dell'ombra o della penombra, ma è compreso nella striscia di penombra e corrisponde circa al limite esterno di questa diminuito di circa il 30-50% del diametro del foro.

Nel 1655 Gian Domenico Cassini, nella costruzione della grande meridiana in San Petronio a Bologna, prese il diametro del foro esattamente uguale a 1/1000 della sua altezza dal pavimento.
Probabilmente per la grande fama e notorietà di Cassini e della sua meridiana, questo rapporto fu in seguito spesso utilizzato per la determinazione del "diametro migliore" del foro nelle grandi meridiane[6] e, spesso anche ai giorni nostri, esso viene considerato quasi come un valore dogmatico.
A mio parere il rapporto fra altezza e diametro del foro non fu preso dal Cassini uguale a 1000 per qualche ragione gnomonica o teorica, ma certamente in seguito a numerose prove eseguite, nelle diverse stagioni, alla ricerca di una immagine luminosa ben osservabile e ben distinta sul pavimento della chiesa di S. Petronio nella quale non potevano essere fatte modifiche nelle finestrature o cambiamenti di sorta.
Analoghe considerazioni si possono fare anche per le altre meridiane che si trovano in diverse città italiane nelle quali il rapporto 1/1000 avrebbe dato luogo a fori eccessivamente piccoli e immagini poco luminose.

Dall'esame dei dati disponibili sulle meridiane a camera oscura presenti in Italia [7], si è trovato che i diametri esistenti sono dalle 2.5 alle 5 volte maggiori del diametro minimo "ottimo" che si ottiene tenendo conto soltanto dell'effetto della diffrazione e calcolato agli Equinozi.
L'illuminamento del disco centrale dell'immagine risulta pertanto dalle 6 alle 25 volte maggiore di quello con il diametro "ottimo".

Da queste considerazioni si può ricavare una semplicissima formula empirica utile per ricavare un valore "corretto" del diametro del foro in funzione della sua altezza dal piano orizzontale:

$D_F = \sqrt{\frac{H}{350}}$ con H e D_F in cm, oppure $D_F = \sqrt{28.6 \cdot H}$ con H in metri e D_F in mm



[6] Roma – S. Maria degli Angeli – Bianchini 1702 – rapporto = 1/1000 . Milano – Duomo –1786 – rapporto = 1/945 . Palermo – Duomo – Piazzi 1794 – rapporto = 1/1000

[7] I dati che seguono sono tratti dalla relazione "Le meridiane italiane a camera oscura" di Giorgio Mesturini, presentata al XI Seminario di Gnomonica – Verbania 2002 e pubblicata negli Atti.

È immediato verificare che questa relazione, valida per le nostre Latitudini (circa 38°- 46°), dà valori del diametro del foro che differiscono da quelli delle meridiane esistenti soltanto di alcuni mm. ; fa eccezione la meridiana del Duomo di Palermo che ha un foro forse eccessivamente piccolo (soltanto 2.5 volte il diametro minimo che abbiamo definito come "ottimo").
Nel grafico sono riportati i diametri dei fori esistenti e quelli calcolati con la formula empirica (curva senza ondulazioni): la meridiana di Palermo corrisponde al picco negativo in corrispondenza del valore 1100.

Nella tabella sono messia confronto i valori dei diametri effettivi e di quelli risultanti dalla formula sopra riportata, per alcune meridiane italiane.

Località	Altezza Foro cm	Diametro Vero - mm	Diametro da Formula-mm
Bologna	197	8,0	7,5
Bologna	199	11,8	7,5
Modena	224	8,3	8,0
Bologna	249	6,0	8,4
Bologna	323	12,9	9,6
Padova	342	15,0	9,9
Bologna	423	10,0	11,0
Roma	432	14,0	11,1
Roma – Torre Venti	519	14,0	12,2
Modena	523	10,5	12,2
Bologna	610	12,2	13,2
Bologna	808	15,0	15,2
Palermo–Cattedrale	1178	*11,8*	*18,3*
Roma – S.M.Angeli	2030	20,3	24,1
Milano –Duomo	2382	25,2	26,1
Bo-S.Petronio	2707	27,1	27,8
Firenze- S.M.Fiore	9011	50,1	50,7

Occorre osservare che con i valori del diametro del foro ottenuti con la formula riportata, il rapporto L/D_F risulta sempre > 400 per altezze del foro H superiori a circa 3-4 m e per latitudini comprese fra 38° e 46°.
Nel caso quindi di piccole altezze del foro (inferiori ai 3-4 m circa) occorrerebbe quindi considerare valori del diametro del foro inferiori a quelli dati dalla formula e precisamente valori ottenuti con la $D_F \leq H/350$.

Disposizione del foro
Anche la disposizione del foro, cioè se esso deve essere posizionato sul soffitto o sulla parete sud, e quella del suo piano, cioè come deve essere orientato rispetto al piano orizzontale, è materia di discussione da moltissimo tempo.
Io penso che, nella maggioranza dei casi, il foro sia stato posto... dove e come era possibile all'interno di un ambiente già precedentemente costruito, con vincoli strutturali, estetici o di altra natura che limitavano in molti modi la libertà del progettista.
Nel caso che non vi siano vincoli a questo posizionamento il criterio da seguire, secondo la mia opinione, è quello "illuminotecnico" che consiste nel rendere più luminosa possibile l'immagine del Sole in Inverno, quando essa ha il diametro maggiore[8] e questo perchè l'illuminamento dell'immagine deve essere abbastanza grande rispetto alle zone del pavimento circostanti, in modo da presentare un buon contrasto e da rendere la sua osservazione agevole.
Indicando con H l'altezza del centro del foro sul piano orizzontale (ortoforo), con h l'altezza del Sole e con γ l'inclinazione del piano del foro sul piano orizzontale e con k il valore 107.5, si può ricavare la relazione seguente che esprime l'intensità di illuminazione nella zona centrale dell'immagine :

$$J = J_0 \cdot \left(\frac{k \cdot D_F}{H}\right)^2 \cdot \sin^3(h) \cdot \sin(h+\gamma) = A \cdot \sin^3(h) \cdot \sin(h+\gamma) = A \cdot R$$

ove A è una quantità costante caratteristica della meridiana in studio ed R una funzione dell'altezza del Sole e dell'angolo di posizionamento del foro.
Come si è già trovato gli assi della zona centrale sono dati da :

[8] Considero sempre, nei ragionamenti che seguono, la linea meridiana orizzontale, cioè posizionata sul pavimento. Nel caso in cui essa sia invece posta verticalmente su una parete, le relazioni cambiano leggermente e possono essere agevolmente ricavate.

asse trasversale $D_P - D_F$; asse longitudinale $\dfrac{D_P - D_F \cdot \sin(h+\gamma)}{\sin(h)}$ con $D_P = \dfrac{H}{k \cdot \sin(h)}$

Indicherò per brevità con RS e RW i valori della funzione R nei giorni del Solstizio d'estate e d'inverno;
dividendo queste due valori si ottiene un parametro C = RS/RW , che da una idea della uniformità di illuminazione dell'immagine fra i due casi estremi.
Negli esempi numerici che seguono i valori dei rapporti RS e RW sono calcolati per due località con Latitudine 42° e 45°.
I diversi casi che si possono presentare al variare del posizionamento del piano del foro sono:

a) Posizionamento astronomico
Asse del foro nella direzione del Sole a mezzogiorno nei giorni degli Equinozi e quindi inclinato di (90° -Lat.) rispetto al piano orizzontale. Il piano del foro è il piano polare inclinato sull'orizzontale di un angolo uguale alla Latitudine del luogo.
In questo caso i raggi del Sole ai Solstizi sono ugualmente inclinati rispetto al piano del foro e quindi la quantità di luce entrante nei due casi è uguale.

Si ricavano i valori : Lat. = 42° ; γ = 42° ; h= RS = 0.78 ; RW = 0.065 ; C = 12.0
Lat. = 45° ; γ = 45° ; h= RS = 0.74 ; RW = 0.045 ; C = 16.4

b) Posizionamento geometrico
L'asse del foro è diretto esattamente nel punto medio della linea meridiana, cioè nel punto equidistante i punti Solstiziali

Si ricavano i valori : Lat. = 42° ; γ = 51.7° ; RS = 0.71 ; RW = 0.069 ; C = 10.3
Lat. = 45° ; γ = 55.7° ; RS = 0.67 ; RW = 0.048 ; C = 13.9

c) Posizionamento illuminotecnico
L'asse del foro è diretto esattamente verso il punto solstiziale invernale.
A mio avviso questo è il posizionamento migliore poiché in questo modo la quantità di luce solare entrante dal foro è maggiore in inverno, quando l'immagine ha dimensioni massime, che in estate, quando l'immagine è minima.

Si hanno i valori : Lat. = 42° ; γ = 65.5° ; RS = 0.58 ; RW = 0.071 ; C = 8.2
Lat. = 45° ; γ = 68.5° ; RS = 0.55 ; RW = 0.049 ; C = 11.2

d) Foro verticale
Spesso il foro viene realizzato su una piastrina metallica verticale sia per ridurre l'ingresso della pioggia, sia perché l'ambiente è separato dall'esterno da una prete verticale.

Si hanno i valori : Lat. = 42° ; γ = 90° ; RS = 0.27 ; RW = 0.065 ; C = 4.2
Lat. = 45° ; γ = 90° ; RS = 0.30 ; RW = 0.046 ; C = 6.4

Come si vede in questo caso l'illuminazione dell'immagine al Solstizio d'estate diminuisce di molto e quasi si dimezza rispetto ai precedenti casi.
L'uniformità della illuminazione aumenta ma a spese della brillantezza della immagine estiva.

e) Foro orizzontale
Questo è un caso spesso obbligato quando il soffitto dell'ambiente è orizzontale.

Si hanno i valori : Lat. = 42° ; γ = 0° ; RS = 0.81 ; RW = 0.030 ; C = 27.3
Lat. = 45° ; γ = 0° ; RS = 0.75 ; RW = 0.018 ; C = 41.5

L' intensità della illuminazione dell'immagine invernale è molto ridotta e quasi si dimezza rispetto ai casi precedenti e l'uniformità dell'illuminamento durante l'anno è molto scarsa.
Come si può vedere l'illuminamento della immagine invernale, è all'incirca costante (ad esclusione del caso e)) e migliora leggermente nel caso c).

Come esempio considero la meridiana in S. Maria degli Angeli a Roma con H = 20.3 m, D_F = 20.3 mm, Lat. = 42° . Prendendo come valore medio dell'illuminazione prodotta dal Sole su una superficie perpendicolare ai suoi raggi il valore J_0 = 100000 lumen/mq, si ricava:

Rapporti distanza/diametro-foro L_S/D_F = 1055 ; L_E/D_F = 1346 ; L_S/D_F = 2411
J = 1156 R e quindi :

Caso a)	JS = 904 lux	JE = 474 lux	JW = 76 lux
Caso e)	JS = 935 lux	JE = 352 lux	JW = 34 lux

Utilizzando il foro "ottimo" calcolato per la distanza foro-immagine all'Equinozio , si otterrebbe un diametro D_F = 6.1mm e di conseguenza un illuminamento dato da J = 104 R e e valori di circa 1/11 dei valori attuali.

In un ambiente chiuso come una chiesa o una cattedrale l'illuminamento indiretto è molto variabile in funzione dalle caratteristiche architettoniche e stagionali e può andare da circa 5 a circa 15 lux o più.

POSSIBILI ERRORI NEL TRACCIAMENTO DI UNA MERIDIANA A CAMERA OSCURA

GIANNI FERRARI

ESTRATTO

Vengono considerati e discussi gli errori che si possono avere in una meridiana classica a camera oscura e che producono piccole differenze fra gli istanti del mezzogiorno vero e quello del transito del centro della immagine del Sole sulla linea meridiana. Questi o sono errori fatti all'atto del tracciamento della meridiana e della realizzazione del foro, o sono dovuti a imprecisioni nelle misurazioni utilizzate per il progetto o, anche, a restauri mal eseguiti e modifiche mal calcolate e arbitrarie.

Il problema

Nelle meridiane classiche a camera oscura si possono talvolta rilevare delle piccole differenze fra gli istanti del mezzogiorno vero e quello del transito del centro della immagine del Sole sulla linea meridiana.

Le cause più frequenti che possono produrre queste imprecisioni che alterano leggermente il funzionamento della meridiana sono o errori fatti all'atto del tracciamento della linea meridiana e della realizzazione del foro, o imprecisioni nelle misurazioni utilizzate per il progetto o anche, sovente, a restauri mal eseguiti e modifiche mal calcolate e arbitrarie.[1]

In seguito utilizzerò l'aggettivo **esistente** per individuare gli elementi che attualmente si possono osservare e misurare.

Chiamerò quindi "foro esistente" il foro attraverso cui, oggi, entrano i raggi del Sole e "linea meridiana esistente" la linea meridiana che, oggi, è possibile vedere e sulla quale è possibile controllare il passaggio della immagine del Sole.

Ovviamente gli elementi esistenti attualmente non sempre coincidono esattamente con quelli disposti e progettati al momento della costruzione dell'impianto.

Chiamerò "linea meridiana **ideale**" la linea meridiana che occorrerebbe tracciare per avere, con il foro esistente, il passaggio del Sole esattamente nell'istante del Mezzogiorno Vero.

La linea meridiana ideale è quindi l'intersezione con il piano orizzontale del piano Meridiano passante per il centro del foro esistente.

Siano :

- φ la latitudine del luogo
- F il punto che individua il centro del foro gnomonico **esistente** o attuale
- O il punto di incontro con il piano orizzontale della verticale passante per il punto F, cioè la proiezione di F sul p. orizzontale stesso
  Il punto O è un punto noto in quanto si può ottenere con un filo a piombo passante per F
- ρ la distanza fra i punti F ed O , cioè l'altezza del foro gnomonico esistente sul piano orizzontale (orto-foro)

Se la linea meridiana è tracciata correttamente essa deve :

- avere origine, per la misura delle distanze, dal punto O, oppure, se inizia più a Nord, il suo prolungamento deve passare per O ;
- coincidere esattamente con l'intersezione fra il piano meridiano passante per F e il piano orizzontale, cioè con la retta avente direzione Sud – Nord passante per il punto O (linea meridiana ideale) (vedi Fig. 1).

Se queste condizioni sono soddisfatte, l'istante in cui il centro della immagine del Sole, prodotta dal foro F, attraversa la linea meridiana coincide esattamente con il Mezzogiorno Vero Locale.

Se la linea meridiana esistente non è stata tracciata correttamente allora, in ogni giorno dell'anno, il passaggio del centro dell'immagine del Sole su di essa avverrà con un ritardo o con un anticipo rispetto al Mezzogiorno Vero, il cui valore è funzione della entità degli errori commessi nella tracciatura cioè delle differenze che vi sono fra le linee meridiane esistente e ideale.

Gli errori che prenderò in considerazione sono:

- un possibile spostamento del punto A "di inizio" della linea meridiana.
  La cosa può essere dovuta o a un errore, fatto durante la tracciatura, sulla posizione del piede della verticale passante per il foro F o a uno spostamento del foro F, fatto in un restauro successivo, o infine a un restauro sbagliato della linea meridiana;

[1] La lenta variazione dell'inclinazione dell'Eclittica e un eventuale errore sul valore della Latitudine del luogo producono cambiamenti sulla lunghezza della linea meridiana ma non influenzano l'istante del passaggio del centro dell'immagine del Sole sulla linea stessa.

- una possibile rotazione della Linea Meridiana esistente, rispetto alla direzione Sud – Nord, dovuto a un non corretto allineamento della linea stessa, durante la sua tracciatura.

Non esaminerò il caso di un errore nella misura dell'altezza del foro ρ che, quindi, considererò corretta.

Siano :

- Oxyz un sistema di coordinate cartesiane con :
  - origine coincidente con il punto O, piede della verticale dal centro del foro F sul piano orizzontale e inizio della linea meridiana ideale [2]
  - asse x nella direzione Est–Ovest, con valori di x crescenti andando verso Est
  - asse y lungo la Linea Meridiana (ideale), cioè nella direzione Sud–Nord . I valori di y sono quindi crescenti andando verso Nord
  - asse z verticale, positivo verso l'alto.

  Il foro F esistente ha quindi coordinate (0, 0, ρ) e il piano meridiano coincide con il piano yz.

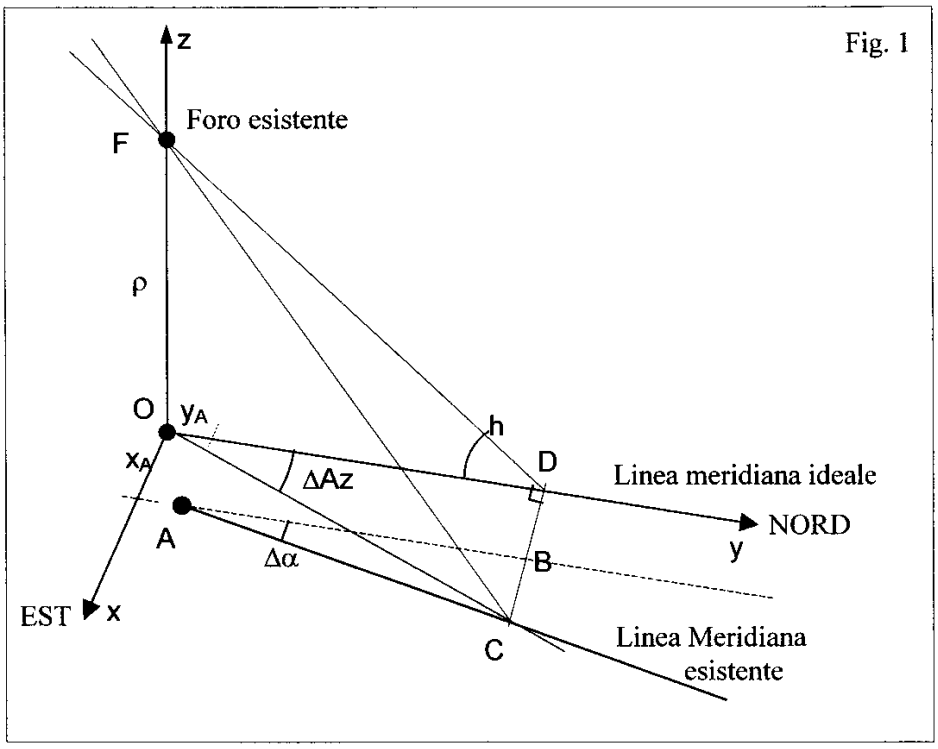


Fig. 1

- A il punto di inizio della linea meridiana esistente oggi, di coordinate (x_A, y_A, 0)
  Se il Foro esistente è piú a Ovest della linea meridiana esistente, allora xA > 0
  Se il Foro esistente è piú a Sud del punto A di inizio della linea meridiana esistente, allora yA > 0
- Δα l'angolo, in radianti, che la linea meridiana esistente forma con l'asse y, cioè con la direzione corretta Sud–Nord. L'angolo Δα si considera positivo se la linea esistente è ruotata in senso orario o verso il quadrante Nord-Est.
- ΔAz, Δω l'Azimut e l'angolo orario del centro del Sole nell'istante del transito sulla linea meridiana esistente, misurati in radianti

[2] Anche se il foro F esistente non coincide con quello originale, ho scelto l'origine del sistema nel piede di F e non nel punto A, inizio della linea meridiana esistente, perché :

- i valori dell'Azimut e dell'angolo orario del Sole sono riferiti al piano meridiano passante per il foro attuale, che cosi coincide con un piano coordinato;
- l'istante del passaggio coincide con quello del transito su un asse coordinato (y), cioè un asse coordinato coincide con la linea meridiana ideale;
- il punto O è noto.

Ipotesi

Suppongo che :

- gli errori di tracciatura (xA, yA, Δα) siano molto piccoli ;
- gli istanti in cui il centro dell'immagine del Sole cade sulla linea meridiana esistente e su quella ideale siano molto vicini, cioè che i valori di ΔAz e Δω siano molto piccoli;
- l'altezza del Sole, nell'istante in cui l'immagine attraversa la linea meridiana esistente, si possa considerare uguale alla altezza al Meridiano $h = 90^\circ - \varphi + \delta$, essendo δ la Declinazione del Sole nell'istante del fenomeno;
- la curva percorsa dal centro dell'immagine del Sole in prossimità del transito, si possa considerare un segmento perpendicolare alla linea meridiana ideale, cioè esattamente disposto nella direzione Est-Ovest o dell'asse x.

Relazioni fra le grandezze

Dalla Fig. 1 si ricava :

$$OD = \rho \cdot \tan(\varphi - \delta) \qquad AB = OD - y_A$$

$$BC = AB \cdot \tan(\Delta\alpha) \cong (\overline{OD} - y_A) \cdot \Delta\alpha = \left[\rho \cdot \tan(\varphi - \delta) - y_A\right] \cdot \Delta\alpha$$

$$DC = x_A + \overline{BC} \cong x_A + \left[\rho \cdot \tan(\varphi - \delta) - y_A\right] \cdot \Delta\alpha$$

Derivando rispetto ad Az i due membri della classica relazione $\sin(\omega) \cdot \cos(\delta) = \cos(h) \cdot \sin(Az)$ e supponendo δ ed h costanti (in prossimità del mezzogiorno), si ha :

$$\frac{dAz}{d\omega} = \frac{\cos(\omega) \cdot \cos(\delta)}{\cos(Az) \cdot \cos(h)}$$ e supponendo $Az \cong \omega \cong 0$

$$\frac{\Delta Az}{\Delta\omega} \cong \frac{\cos(\delta)}{\cos(h)} \cong \frac{\cos(\delta)}{sin(\varphi - \delta)}$$ Infine dalla $\overline{DC} = \overline{OD} \cdot \tan(\Delta Az) \cong \overline{OD} \cdot \Delta Az$ si ha :

$$\Delta Az = \frac{x_A + (\overline{OD} - y_A) \cdot \Delta\alpha}{\overline{OD}} = \frac{x_A - y_A \cdot \Delta\alpha}{\rho \cdot \tan(\varphi - \delta)} + \Delta\alpha$$ e quindi

$$\Delta\omega = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos(\delta)} \cdot \Delta Az = \frac{sen(\varphi - \delta)}{\cos(\delta)} \cdot \Delta\alpha + \frac{x_A - y_A \cdot \Delta\alpha}{\rho} \cdot \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos(\delta)} \qquad (1)$$

e

$$\Delta\alpha = \frac{\cos(\delta) \cdot \Delta\omega - \frac{x_A}{\rho} \cdot \cos(\varphi - \delta)}{sen(\varphi - \delta) + \frac{y_A}{\rho} \cdot \cos(\varphi - \delta)} \qquad (2)$$

Si ha pure :

$$AC = \frac{AB}{\cos(\Delta\alpha)} = \frac{\rho \cdot \tan(\varphi - \delta) - y_A}{\cos(\Delta\alpha)} \approx \left[\rho \cdot \tan(\varphi - \delta) - y_A\right] \cdot \left(1 + \frac{(\Delta\alpha)^2}{2}\right)$$ cioè

$$AC = \rho \cdot \tan(\varphi - \delta) - y_A + \textit{termini trascurabili} \qquad (3)$$

Ritardo nel passaggio della immagine del Sole sulla linea esistente

Nella relazioni precedenti Δω è la variazione dell'angolo orario del Sole, cioè il ritardo fra l'istante in cui si ha il passaggio del centro della sua immagine sulla linea meridiana esistente e l'istante del Mezzogiorno Vero Locale e quindi se Δω è positivo significa che il centro dell'immagine del Sole passa sulla linea esistente DOPO il Mezzogiorno Vero.

Poiché la variazione di 1° dell'angolo orario ω corrisponde a 4 minuti di temp, 1 sec di tempo corrisponde a una variazione di ω di 1/240 di grado , uguale a $\frac{\pi}{240 \cdot 180} radianti$.

Volendo esprimere Δω in secondi di tempo occorre perciò sostituire nelle formule precedenti al posto Δω il valore :

$$\frac{\pi}{240 \cdot 180} \cdot \Delta\omega_\sec_di_tempo$$

Considerazioni :

- se $\Delta\alpha$ è positivo (linea meridiana esistente ruotata verso Nord-Est) si ha un $\Delta\omega$ positivo : l'immagine del Sole passa al meridiano dopo il mezzogiorno;
- se la xA è positiva, cioè il Foro esistente è piú a Ovest della linea m. esistente, si ha lo stesso effetto;
- la yA produce un effetto trascurabile sul ritardo dei passaggi

Ricerca dei valori degli errori xA , yA , $\Delta\alpha$.

Per ottenere i valori degli errori occorre misurare l'istante del passaggio del centro del Sole al meridiano in due istanti diversi; trascurando l'effetto di yA, si hanno le relazioni che seguono in cui ($\delta 1$ e $\Delta\omega 1$) sono i valori relativi all'istante 1 e ($\delta 2$ e $\Delta\omega 2$) sono quelli relativi all'istante 2.

Ponendo :

$$A_1 = \frac{sen(\varphi - \delta_1)}{\cos(\delta_1)} \qquad A_2 = \frac{sen(\varphi - \delta_2)}{\cos(\delta_2)}$$

$$B_1 = \frac{\cos(\varphi - \delta_1)}{\cos(\delta_1)} \qquad B_2 = \frac{\cos(\varphi - \delta_2)}{\cos(\delta_2)}$$

si ricavano dalla (3) le relazioni :

$$\Delta\omega_1 = A_1 \cdot \Delta\alpha + \frac{(x_A - y_A \cdot \Delta\alpha)}{\rho} \cdot B_1 \qquad \Delta\omega_2 = A_2 \cdot \Delta\alpha + \frac{(x_A - y_A \cdot \Delta\alpha)}{\rho} \cdot B_2$$

da cui

$$\Delta\alpha = \frac{B_1 \cdot \Delta\omega_2 - B_2 \cdot \Delta\omega_1}{A_2 \cdot B_1 - A_1 \cdot B_2} \quad (4) \qquad \frac{x_A}{\rho} = \frac{A_2 \cdot \Delta\omega_1 - A_1 \cdot \Delta\omega_2}{A_2 \cdot B_1 - A_1 \cdot B_2} \quad (5)$$

Misurando la lunghezza AC nell'istante 1 , dalla (3) si ricava la :

$$y_A = \rho \cdot \tan(\varphi - \delta_1) - AC_1 \quad (6)$$

Ricordo che se il foro esistente è piú a Ovest della linea meridiana esistente, allora xA > 0 mentre se esso è piú a Sud del punto A di inizio della linea meridiana esistente, allora yA > 0.

Esempio [3]

Siano $\varphi = 41° 54'9''$ $\rho = 20320$ mm

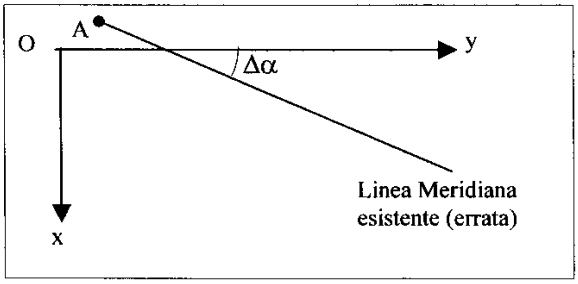
Con i seguenti valori misurati

$\delta 1 = -20°$ transito in ritado di 18 sec cioè $\Delta\omega 1$ = 18 sec di tempo = 0.0013090 rad

$\delta 2 = +10°$ transito in ritado di 6 sec cioè $\Delta\omega 2$ = 6 sec di tempo = 0.0004363 rad

AC1 = 12610 mm si ricava :

$\Delta\alpha = 347.3'' = 0.0965°$; xA = -11.01 mm ; yA = 12649.3 – 12610 = 39.3 mm



Ricercae della altezza ρ del foro

Volendo determinare sperimentalmente l'altezza ρ del foro F esistente occorre misurare, lungo la linea meridiana esistente, le distanze da un punto qualunque Q su di essa al centro dell'immagine del Sole in due giorni distinti.

Siano :

- $\delta 1$ e QC_1 i valori nell'istante 1

[3] Tutti gli esempi riguardano la meridiana in S. Maria degli Angeli a Roma. Ringrazio Mario Catamo e Cesare Lucarini per i dati forniti.

– $\delta 2$ e QC_2 i valori nell'istante 2

Dalla (3) si ricava $\rho = \dfrac{QC_1 - QC_2}{\tan(\varphi - \delta_1) - \tan(\varphi - \delta_2)}$

Nota :
Se l'istante del passaggio della immagine del Sole sulla linea si determina utilizzando ad esempio il bordo superiore (o inferiore) della macchia, occorrerà sottrarre (sommare) al valore della declinazione del Sole nell'istante il suo semidiametro angolare e utilizzare nelle formule il risultato cosi ottenuto.

Casi diversi

I)

La linea meridiana esistente è tracciata in modo corretto : xA = yA = $\Delta\alpha$ = 0 .
Dalla (1) si ricava , ovviamente , $\Delta\omega$ = 0. Il centro della immagine attraversa la linea meridiana esistente esattamente al Mezzogiorno Vero Locale.

II)

Il punto A di inizio della linea meridiana esistente coincide con il punto O, piede della verticale dal foro F : xA = yA =0
La linea meridiana è stata, erroneamente, disegnata ruotata di un angolo $\Delta\alpha$.
La relazione (1) diventa :

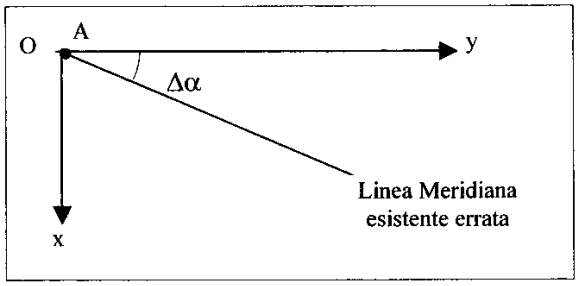
$$\Delta\omega = \frac{sen(\varphi - \delta)}{\cos(\delta)} \cdot \Delta\alpha \quad \text{o anche}$$

$$\Delta\omega_\text{sec}_di_tempo = \frac{sen(\varphi - \delta)}{\cos(\delta)} \cdot \frac{1}{15} \cdot \Delta\alpha_\text{sec}_d'arco$$

e la sua inversa :

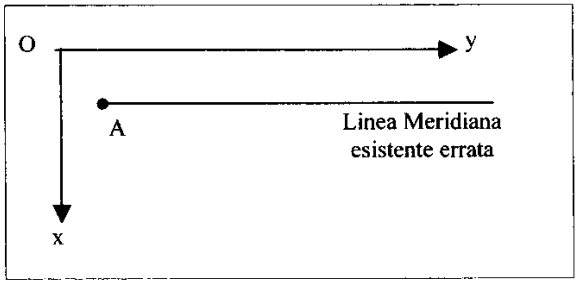
$$\Delta\alpha_\text{sec}_d'arco = 15 \cdot \frac{\cos(\delta)}{sen(\varphi - \delta)} \cdot \Delta\omega_\text{sec}_di_tempo$$

Esempio.
Siano φ = 41° 54'9" $\Delta\alpha$=4'30"= 270"
Al Solstizio Invernale $\delta = -23.45°$ si ha
$\Delta\omega$ = 17.7 sec di tempo
Agli Equinozi $\Delta\omega$ = 11.9 sec di tempo
Al Solstizio Estivo $\delta = +23.45°$ si ha
$\Delta\omega$ = 6.2 sec di tempo



III)

Il punto A **NON** coincide con il piede della verticale per il foro, mentre la linea meridiana esistente è esattamente parallela a quella vera, cioè ha esattamente la direzione Nord-Sud . $\Delta\alpha$ = 0



La relazione (1) diventa

$$\Delta\omega = \frac{x_A}{\rho} \cdot \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos(\delta)} \quad \text{da cui}$$

$$\Delta\omega_\text{sec}_di_tempo = \frac{x_A}{\rho} \cdot \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos(\delta)} \cdot \frac{240 \cdot 180}{\pi} \quad \text{e quindi}$$

$$x_A = \rho \cdot \frac{\cos(\delta)}{\cos(\varphi - \delta)} \cdot \frac{\pi}{240 \cdot 180} \Delta\omega_\text{sec}_di_tempo$$

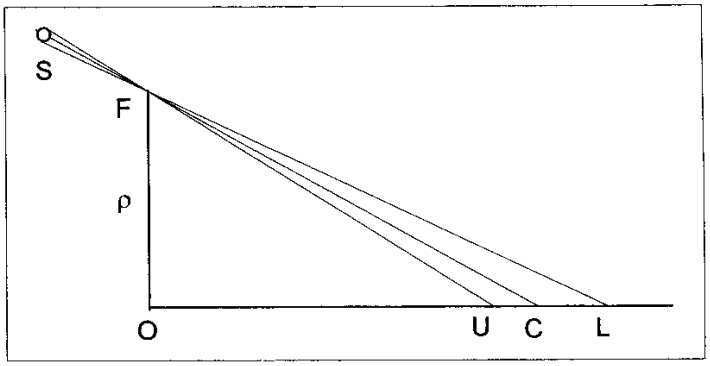
Esempio
Siano φ = 41° 54'9" ρ = 20320 mm e in un istante in cui δ = 10° si abbia un ritardo nel transito di 17 sec.
Si ricava xA = 29.1 mm (punto F piú a Ovest della linea meridiana esistente).

Al Solstizio Invernale $\delta = -23.45°$ il transito è in ritardo di $\Delta\omega =$ 9.2 sec e a quello Estivo di 21.0 sec .

Altre formule

1) Dimensione della ellisse immagine del Sole

Nelle considerazioni che seguono si trascura l'effetto della dimensione del foro sulla immagine.
Siano U (upper) il punto della immagine prodotto dal bordo superiore del disco solare quando il centro C si trova sulla linea meridiana e L (lower) il punto prodotto dal bordo inferiore.
Da notare che il punto C **non** coincide esattamente con il centro della ellisse luminosa sul piano.
Sia inoltre σ il valore angolare del semidiametro solare (medio = 16')



Diametro NORD-SUD

Gli angoli OUF, OCF e OLF di figura sono dati da :

OUF = $90° - \varphi + \delta + \sigma$
OCF = $90° - \varphi + \delta$
OLF = $90° - \varphi + \delta - \sigma$ per cui

$$OU = \rho \cdot \tan(\varphi - \delta - \sigma), \quad OC = \rho \cdot \tan(\varphi - \delta), \quad OL = \rho \cdot \tan(\varphi - \delta + \sigma) \text{ e infine}$$

Diametro immagine $OL - OU = \rho \cdot [\tan(\varphi - \delta + \sigma) - \tan(\varphi - \delta - \sigma)]$

Esempio - Con $\varphi = 41° 54'9''$, $\rho = 20320$ mm e $\sigma = 32'/2$

Al Solstizio Invernale	OU = 43747.4 mm	CU = 538.3 mm
	OC = 44285.7	CL = 549.3
	OL = 44835.0	UL = 1087.7 diametro Nord_Sud
Al Solstizio Estivo	OU = 6675.3 mm	CU = 104.9 mm
	OC = 6780.3	CL = 105.3
	OL = 6885.5	UL = 210.2 diametro Nord_Sud

Diametro EST-OVEST

Il diametro medio della macchia lungo la linea Est-Ovest con $\sigma = 16'$, è dato da :

$$Diam_EW = \rho \cdot \frac{2 \cdot \tan(\sigma)}{\cos(\varphi - \delta)} \cong \frac{1}{107.5} \cdot \frac{\rho}{\cos(\varphi - \delta)}$$

Esempio - Con $\varphi = 41° 54'9''$, $\rho = 20320$ mm e $\sigma = 32'/2$
Diametro Est-Ovest = 453.2 mm al Solstizio Invernale; 199.2 mm al Solstizio Estivo e 254.0 mm agli Equinozi.
Quindi al S. Estivo l'immagine è di 210 x 199 mm, al S. Invernale di 1088 x 453 mm e agli Equinozi di 341 x 254 mm

2)

Velocità dello spostamento del centro della immagine del Sole

Si ricava facilmente che la velocità dello spostamento della immagine del Sole, in direzione Ovest-Est, è data da :

$$velocita' = \rho \cdot \frac{\cos(\delta)}{\cos(\varphi - \delta)} \cdot \frac{\pi}{240 \cdot 180} mm/\sec$$

Esempio - Con $\varphi = 41° 54'9''$, $\rho = 20320$ mm si ricava che al Solstizio Invernale la velocità è di 3.26 mm/sec, al Solstizio Estivo di 1.43 mm/sec e agli Equinozi di 1.99 mm/sec.

3)

Tempo di attraversamento

Il tempo impiegato dalla immagine del Sole ad attraversare la Linea Meridiana è dato da :

$$T_attraversamento = 4 \cdot \frac{Diametro_Sole_in_primi_d'arco}{\cos(\delta)} \approx \frac{128}{\cos(\delta)}$$

Esempio - Con $\varphi = 41° 54'9''$ e Diam_Sole= 32' si ha al Solstizio Invernale e a quello Estivo un tempo di attraversamento di 139.6sec ; agli Equinozi il tempo di attraversamento è di 124 sec

4)

Velocità di spostamento della macchia nella direzione Sud-Nord

Il punto in cui il centro della macchia attraversa la linea meridiana, si posta durante l'anno, dipendendo la sua posizione dalla declinazione del Sole.

Dalla

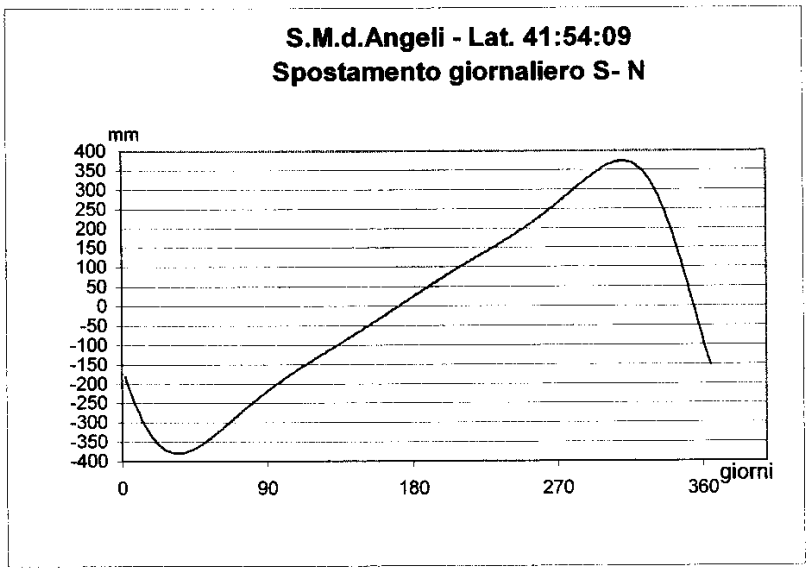
$$OC = \rho \cdot \tan(\varphi - \delta)$$ si ricava la :

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\rho}{\cos^2(\varphi - \delta)} \cdot \frac{d\delta}{dt}$$ e, considerando una variazione di t di 1 giorno

$$\Delta y \approx -\frac{\rho}{\cos^2(\varphi - \delta)} \cdot \Delta\delta_rad/giorno \quad mm/giorno$$ o anche

$$\Delta y \approx -\frac{\rho}{\cos^2(\varphi - \delta)} \cdot \frac{\pi}{60 \cdot 180} \Delta\delta_primi/giorno$$

Esempio - Con $\varphi = 41° 54'9''$, $\rho = 20320$ mm

Agli Equinozi si ha $\delta = 0°$ e $\Delta\delta = 0.4°$/giorno =24'/giorno = 0.00698 rad/giorno e quindi Δy = -256 mm/giorno

Il segno meno significa che se δ cresce la y cala